Sémantika výrokové logiky

Obsah

Sémantika výrokové logiky - pravdivostní hodnoty

Sémantika přiřazuje formulím (syntaktickým objektům) význam.
Ve výrokové logice vyhodnocuje pravdivost formulí.

Booleovské (pravdivostní) hodnoty

Pravdu značíme jako 1, nepravdu jako 0.
Množinu pravdivostních hodnot označujeme jako $\mathrm{Bool} = \{0, 1\}$.

Pravdivostní ohodnocení formulí bude speciální funkce typu

$$u : \mathrm{Fm}(At) \to \mathrm{Bool}.$$

- Pravdivost formule závisí na pravdivosti jejích částí.
- Je nutno znát (či zadat) pravdivost atomických formulí.

Sémantika výrokové logiky - logické spojky

Funkce typu $\mathrm{Bool}^n \to \mathrm{Bool}$ ($n \in \mathbb{N}$) se nazývá booleovská funkce.
Význam logických spojek a konstant je dán booleovskými funkcemi (pravdivostními tabulkami):

vstup 1	vstup 2	$[\![\wedge]\!]$	$[\![\vee]\!]$	$[\![\Rightarrow]\!]$	$[\![\Leftrightarrow]\!]$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

vstup 1	$[\![\neg]\!]$
0	1
1	0

$[\![\top]\!]$	$[\![\bot]\!]$
1	0

Sémantika výrokové logiky - pravdivostní ohodnocení

Pravdivostní ohodnocení

Pravdivostní ohodnocení u je zobrazení $u\colon \mathrm{Fm}(At) \to \mathrm{Bool}$ respektující sémantiku logických spojek, tj., splňující:

- $u(\top) = [\![\top]\!] = 1.$
- $u(\bot) = [\![\bot]\!] = 0.$
- $u(\neg\alpha) = [\![\neg]\!](u(\alpha)).$
- $u(\alpha \wedge \beta) = [\![\wedge]\!](u(\alpha), u(\beta)).$
- $u(\alpha \vee \beta) = [\![\vee]\!](u(\alpha), u(\beta)).$
- $u(\alpha \Rightarrow \beta) = [\![\Rightarrow]\!](u(\alpha), u(\beta)).$
- $u(\alpha \Leftrightarrow \beta) = [\![\Leftrightarrow]\!](u(\alpha), u(\beta)).$

$u(\alpha) = 1$ znamená, že *formule α je pravdivá v ohodnocení u*,
$u(\alpha) = 0$ znamená, že *formule α je nepravdivá v ohodnocení u*.

Sémantika výrokové logiky - pravdivostní ohodnocení

Tvrzení

Každé pravdivostní ohodnocení $u : \mathrm{Fm}(At) \to \mathrm{Bool}$ je jednoznačně určeno svými hodnotami na atomických formulích $a \in At$.
To jest: k zadání pravdivostního ohodnocení $u : \mathrm{Fm}(At) \to \mathrm{Bool}$ stačí zadat zobrazení $u_{At} : At \to \mathrm{Bool}$ (ohodnocení atomických formulí).

Důsledek

Máme-li $|At| = n$ atomických formulí, pak počet všech různých pravdivostních ohodnocení je 2^n.

Pravdivostní hodnoty formule o n logických proměnných ve všech různých ohodnoceních lze zapsat do tabulky o 2^n řádcích. Každý řádek representuje jiné ohodnocení.

Sémantika výrokové logiky - splnitelnost

Definice

Formule $\varphi \in \mathrm{Fm}(At)$ se nazývá

- splnitelná formule, jestliže je pravdivá v alespoň jednom ohodnocení,
- tautologie, jestliže je pravdivá ve všech ohodnoceních,
- kontradikce, jestliže není pravdivá v žádném ohodnocení.

Příklad

Formule $\varphi = (a \wedge b) \Rightarrow (b \wedge c)$ je splnitelná, protože je pravdivá např. v ohodnocení u daném hodnotami
$u(a) = u(c) = 0,\ u(b) = 1.$
Formule φ však není tautologie, svědkem je ohodnocení $\tilde{u}$ dané hodnotami $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 1,\ \tilde{u}(c) = 0$, v němž je $\tilde{u}(\varphi) = 0$.

Sémantika výrokové logiky - splnitelnost

Definice

Množina formulí S se nazývá splnitelná, pokud existuje alespoň jedno pravdivostní ohodnocení u, ve kterém jsou pravdivé všechny formule $\varphi \in S$ (najednou). Jinak ji nazveme nesplnitelnou.

Příklad

Množina $S = \{a \Rightarrow b, \neg b\}$ je splnitelná. Svědkem splnitelnosti je ohodnocení u, pro které platí $u(a) = 0$, $u(b) = 0$.

Příklad

Množina $S = \{a \vee b, \neg a, \neg b\}$ je nesplnitelná. Přitom každá jednotlivá formule z S je splnitelná.

Sémantika výrokové logiky - sémantická ekvivalence

Definice

Řekneme, že formule φ a ψ jsou sémanticky ekvivalentní, jestliže pro každé ohodnocení u platí $u(\varphi) = u(\psi)$. Značíme

$$\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi.$$

Definice

Mějme formuli $\varphi \in \mathsf{Fm}(At)$. Její význam je její pravdivostní tabulka: booleovská funkce

$$\begin{aligned} [\![\varphi]\!] : \mathsf{Bool}^{At} &\to \mathsf{Bool} \\ u_{At} &\mapsto u(\varphi). \end{aligned}$$

Sémantika výrokové logiky - sémantická ekvivalence

Poznámka

Formule φ a ψ jsou sémanticky ekvivalentní, pokud mají stejný význam: to jest, pokud $[\![\varphi]\!] = [\![\psi]\!]$ (pravdivostní tabulky φ a ψ se shodují).

Příklad

$a \Rightarrow b \mathrel{=}\!\!\!|\!\!\models \neg a \vee b$.

Tvrzení

Sémantická ekvivalence je relace ekvivalence na množině $\mathrm{Fm}(At)$. To jest: nechť α, β, $\gamma \in \mathrm{Fm}(At)$. Pak

- $\alpha \mathrel{=}\!\!\!|\!\!\models \alpha$ (reflexivita).
- Pokud $\alpha \mathrel{=}\!\!\!|\!\!\models \beta$, pak $\beta \mathrel{=}\!\!\!|\!\!\models \alpha$ (symetrie).
- Pokud $\alpha \mathrel{=}\!\!\!|\!\!\models \beta$ a $\beta \mathrel{=}\!\!\!|\!\!\models \gamma$, pak $\alpha \mathrel{=}\!\!\!|\!\!\models \gamma$ (transitivita).

Sémantika výrokové logiky - substituce

Tvrzení

Jsou-li α, β, γ a δ formule splňující $\alpha \models\mkern-8mu\dashv \gamma$ a $\beta \models\mkern-8mu\dashv \delta$, pak platí

- $\neg\alpha \models\mkern-8mu\dashv \neg\gamma$
- $(\alpha \circ \beta) \models\mkern-8mu\dashv (\gamma \circ \delta)$, kde $\circ$ označuje libovolnou binární spojku.

Sémantická ekvivalence respektuje logické spojky.
Můžeme substituovat podformule za sémanticky ekvivalentní podformule a neporušíme sémantickou ekvivalenci.

Příklad

Jelikož platí $a \Rightarrow b \models\mkern-8mu\dashv \neg a \vee b$ a $c \models\mkern-8mu\dashv c$, platí i

$$(a \Rightarrow b) \vee c \models\mkern-8mu\dashv (\neg a \vee b) \vee c.$$

Sémantika výrokové logiky - jak „negovat“ tvrzení?

Jak převádět tvrzení v „negativním“ tvaru do „positivního“ tvaru?

- „Není pravda, že není pravda, že prší.“
- „Není pravda, že jsem byl v klubu a propil nájemné.“

Chceme převádět formule tvaru $\neg\varphi$ na sémanticky ekvivalentní formule, jejichž hlavní spojka není negace.

- $\neg\top \mathrel{\models\!\!\!|} \bot, \quad \neg\bot \mathrel{\models\!\!\!|} \top$
- $\neg\neg\varphi \mathrel{\models\!\!\!|} \varphi$
- $\neg(\varphi \land \psi) \mathrel{\models\!\!\!|} \neg\varphi \lor \neg\psi, \quad \neg(\varphi \lor \psi) \mathrel{\models\!\!\!|} \neg\varphi \land \neg\psi$
- $\neg(\varphi \Rightarrow \psi) \mathrel{\models\!\!\!|} \varphi \land \neg\psi$
- $\neg(\varphi \Leftrightarrow \psi) \mathrel{\models\!\!\!|} (\varphi \land \neg\psi) \lor (\neg\varphi \land \psi)$

Sémantika výrokové logiky - negační normální forma

Definice

Literál je buď atomická formule, nebo její negace.

$$L ::= a \mid \neg a, \quad a \in At$$

Definice

Formule $\varphi \in \mathrm{Fm}(At)$ je v negační normální formě, pokud byla syntakticky sestavena z literálů bez použití spojky negace.

$$N ::= L \mid \top \mid \bot \mid N \wedge N \mid N \vee N \mid N \Rightarrow N \mid N \Leftrightarrow N$$

Tvrzení

Každá formule je sémanticky ekvivalentní nějaké formuli v negační normální formě.