

Cvičení: přirozená dedukce ve výrokové logice

Spojka	Zavedení spojky	Eliminace spojky
\wedge	$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} i\wedge$	$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} e\wedge_1 \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} e\wedge_2$
\vee	$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} i\vee_1 \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} i\vee_2$	$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{ c } \hline \varphi \\ \vdots \\ \chi \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c } \hline \psi \\ \vdots \\ \chi \\ \hline \end{array}}{\chi} e\vee$
\Rightarrow	$\frac{\begin{array}{ c } \hline \varphi \\ \vdots \\ \psi \\ \hline \end{array}}{\varphi \Rightarrow \psi} i\Rightarrow$	$\frac{\varphi \quad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi} e\Rightarrow$
\Leftrightarrow	$\frac{\begin{array}{ c } \hline \varphi \\ \vdots \\ \psi \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c } \hline \psi \\ \vdots \\ \varphi \\ \hline \end{array}}{\varphi \Leftrightarrow \psi} i\Leftrightarrow$	$\frac{\varphi \quad \varphi \Leftrightarrow \psi}{\psi} e\Leftrightarrow_1 \quad \frac{\varphi \Leftrightarrow \psi \quad \psi}{\varphi} e\Leftrightarrow_2$
\neg	$\frac{\begin{array}{ c } \hline \varphi \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \end{array}}{\neg \varphi} i\neg$	$\frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} e\neg$
\top	$\frac{}{\top} i\top$	není
\perp	není	$\frac{}{\perp} e\perp$
$\neg\neg$	(netřeba) $\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi} i\neg\neg$	$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi} e\neg\neg$

Pomocné pravidlo: pravidlo iterace (it).

Odvozené pravidlo LEM (zákon vyloučeného třetího, tertium non datur):

$$\frac{}{\varphi \vee \neg \varphi} \text{LEM}$$

Ve všech příkladech můžete předpokládat, že zadané řetězce jsou formulami výrokové logiky. Sestrojte důkazy přirozenou dedukcí. Pokud v úloze není řečeno jinak, nepomáhejte si využitím odvozeného pravidla LEM.

Základní příklady

- $a \Rightarrow b, a \Rightarrow c \vdash a \Rightarrow (b \wedge c)$.
- $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \vdash (a \wedge b) \Rightarrow c$.
- $a \wedge (b \vee c) \vdash (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.
- $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) \vdash (a \vee b) \Rightarrow (a \wedge b)$.
- $(a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c) \vdash a \Rightarrow (b \vee c)$.
- $w \Rightarrow x, y \Rightarrow z \vdash (w \vee y) \Rightarrow (x \vee z)$.
- $\vdash \neg(a \wedge b) \Rightarrow (a \Rightarrow \neg b)$.
- $\vdash ((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow \neg c)) \Rightarrow \neg(a \wedge b)$.
- $\neg a \wedge \neg b \vdash \neg(a \vee b)$.
- $\neg a \vee \neg b \vdash \neg(a \wedge b)$.

K procvičení doma:

- $\vdash ((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow \neg c)) \Rightarrow \neg(a \wedge b)$.
- $\vdash (a \wedge b) \Rightarrow ((a \Rightarrow c) \Rightarrow \neg(b \Rightarrow \neg c))$.

Negace a implikace

- $\neg a \Rightarrow \neg b \vdash b \Rightarrow a$.
- $\neg(a \Rightarrow b) \vdash \neg b$.
- $\neg(a \Rightarrow b) \vdash a$.

Delší nepřímé důkazy

- $\neg p \Rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash p$.
- $\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$.

Příklady s využitím LEM (K procvičení doma.)
V těchto příkladech využijte ke zkrácení důkazu pravidlo vyloučeného třetího (LEM).

- $a \Rightarrow b \vdash \neg a \vee b$.
- $\vdash a \Rightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b))$.

Příklady s ekvivalencí (K procvičení doma.)

- $\phi \Leftrightarrow \psi \vdash (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi)$.
- $(\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi) \vdash \phi \Leftrightarrow \psi$.
- $\vdash \neg(a \Leftrightarrow \neg a)$.
- $a \Leftrightarrow b \vdash (\neg a \Leftrightarrow \neg b)$.

Odvození $e_{\neg\neg}$ z LEM Bez použití pravidla $e_{\neg\neg}$ a s použitím LEM dokažte

$$\neg\neg\phi \vdash \phi.$$

Disjunktivní sylogismus Jako *disjunktivní sylogismus* označujeme pravidlo

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg\psi}{\phi} \text{ DS}$$

- Odvoďte DS pomocí pravidla e_{\perp} .
- Odvoďte pravidlo e_{\perp} pomocí DS.

Nepovinné domácí cvičení Dokažte

- $a \vee b, b \Rightarrow (\neg c \vee e), a \Rightarrow (\neg c \vee d) \vdash c \Rightarrow (e \vee d)$.
- $\vdash ((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow a$.