

Úloha 1. V této úloze je množinou atomických formulí množina

$$At = \{a, b, c, d\}.$$

O následujících formulích výrokové logiky rozhodněte, zda jsou tautologiemi, kontradikcemi, a zda jsou splnitelné.

1. $(\neg a \Rightarrow b) \vee ((a \wedge \neg c) \Leftrightarrow b)$.
2. $(a \Rightarrow (b \vee c)) \vee (c \Rightarrow \neg a)$.
3. $((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee (a \wedge d)$.

Zakreslete syntaktické stromy těchto formulí.

Úloha 2. Mějme množinu formulí

$$S = \{a \Rightarrow (b \wedge c), b \Rightarrow (\neg a \vee \neg c)\}.$$

Je S splnitelná?

Úloha 3. Mějme množinu formulí

$$T = \{a \vee b, c \vee b, b \Rightarrow (a \wedge b)\}.$$

Platí $T \models b$?

Úloha 4. Nalezněte disjunktivní a konjunktivní normální formy následujících Booleových funkcí f , g a h . Proměnné x , y a z representujte atomickými formullemi a , b a c .

x	y	z	f	g	h
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

Úloha 5. Rozhodněte, zda je množina spojek

1. $\{\neg, \Rightarrow\}$,
2. $\{\top, \Rightarrow\}$,
3. $\{\perp, \Rightarrow\}$,
4. $\{\top, \oplus, \vee\}$,
5. $\{\neg, \oplus, \vee\}$,

úplným systémem logických spojek. (Spojka \oplus značí vylučovací nebo, tedy *xor*.)

Úloha 6. Ať je $Con(\alpha)$ množina všech sémantických důsledků formule α . Dokažte, že $\alpha \models \beta$ právě tehdy, když $Con(\beta) \subseteq Con(\alpha)$.

Úloha 7. Matematickou indukcí definujte zkratky

$$\bigwedge_{i=1}^n \alpha_i \quad \text{a} \quad \bigvee_{i=1}^n \alpha_i$$

pro každé kladné přirozené číslo n , kde pro každé přirozené i ($1 \leq i \leq n$) je α_i formulí výrokové logiky.

Promyslete, jak by bylo vhodné dodefinovat dané zkratky pro $n = 0$.

Úloha 8. Dokažte matematickou indukcí zobecněné De Morganovy zákony:

1.
$$\neg \left(\bigwedge_{i=1}^n \alpha_i \right) \equiv \bigvee_{i=1}^n (\neg \alpha_i),$$

2.
$$\neg \left(\bigvee_{i=1}^n \alpha_i \right) \equiv \bigwedge_{i=1}^n (\neg \alpha_i).$$

Úloha 9. Dokažte, že pro každou formuli výrokové logiky φ platí:

φ je splnitelná právě tehdy, když $\neg\varphi$ není tautologie.

Úloha 10. Pro danou formuli φ nalezněte CNF ψ , která je sémanticky ekvivalentní (tautologicky ekvivalentní) s φ . Pokuste se formuli ψ zjednodušit. Spojka \oplus označuje vylučovací nebo, neboli *xor*. Spojka $|$ označuje *nand*, tedy negaci konjunkce.

1. $\varphi = (a \wedge b) \oplus (b \vee c)$
2. $\varphi = (a \Rightarrow (b \wedge c)) \oplus (b \Rightarrow (a \vee c))$
3. $\varphi = (a | b) \Rightarrow ((a \oplus c) \vee (b \oplus c))$
4. $\varphi = ((a \wedge b) \Rightarrow (b \vee c)) \Leftrightarrow (a \Rightarrow b)$
5. $\varphi = \neg((a \Leftrightarrow b) \vee (b \wedge c)) \oplus (a | b)$

Úloha 11. Ukaŕte, ŕe platí následující důsledky.

1. $\{\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma\} \models \alpha \Rightarrow \gamma$
2. $\{\alpha \Rightarrow \beta, \neg\beta\} \models \neg\alpha$ (modus tollens)
3. $\{\alpha \vee \beta, \alpha \Rightarrow \gamma, \beta \Rightarrow \gamma\} \models \gamma$
4. $\{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha \Rightarrow \neg\beta\} \models \neg\alpha$
5. $\{(a \wedge b) \Rightarrow c, (a \wedge \neg b) \Rightarrow c\} \models a \Rightarrow c$

Úloha 12. Jsme na ostrově, na kterém ŕijí jen poctivci a padouši. Poctivci mluví vždy pravdu a padouši vždy lŕou. Zkuste vyřešit následující hádanky.

1. Tři obyvatelé ostrova, A, B a C si povídají na zahradě. Kolem jde cizinec a ptá se A: „Jste padouch, nebo poctivec?“ A odpoví, ale nezřetelně, takže cizinec neví, co A řekl. Cizinec se nato zeptá B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, ŕe je padouch.“ V tom okamŕiku C řekne: „Nevěřte B, ten lŕe!“

Co jsou B a C?

2. Cizinec přijde k dalším třem obyvatelům ostrova. Zeptá se A: „Kolik je mezi vámi poctivců?“ A odpoví nezřetelně. Cizinec se zeptá B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, ŕe je mezi námi jediný poctivec.“ Nato řekne C: „Nevěřte B, ten lŕe!“

Co jsou B a C?

3. Teď máme dva obyvatele ostrova, A a B. A prohlásí: „Alespoň jeden z nás je padouch.“

Co jsou A a B?

4. Zase máme tři, A, B a C. A a B prohlásí:
A: „Všichni jsme padouši.“
B: „Právě jeden z nás je poctivec.“
Co jsou A, B a C?
5. Co kdyby v předchozím příkladu A a B řekli:
A: „Všichni jsme padouši.“
B: „Právě jeden z nás je padouch.“
Dá se určit, co je B? Dá se určit, co je C?

Úloha 13. Jste na ostrově poctivců a padouchů. Provádíte sčítání (a rozřazování) lidu. To jest, chcete zjistit, kdo je poctivec a kdo padouch.

1. Vstoupíte do prvního domu, otevře vám muž se ženou. Zeptáte se, kdo je kdo, muž odpoví: „Oba jsme padouši.“
2. Vstoupíte do druhého domu, otevřou vám dva muži. Zeptáte se, zda jsou padouši, první muž odpoví: „Alespoň jeden z nás je.“
3. Vstoupíte do třetího domu, otevřou vám dvě ženy. Zeptáte se první, zda je poctivá. Odpoví: „Pokud jsem poctivá, pak je poctivá i má žena.“
4. Vstoupíte do čtvrtého domu, otevře vám muž se ženou. Zeptáte se, co jsou zač. Muž odpoví: „Se ženou jsme jednoho druhu — oba poctivci nebo oba padouši.“