Řešení prvního domácího úkolu

Zadání Mějme $x \in \mathbb{R}$, pro které platí $x \neq 1$. Dokažte (*indukcí podle* n), že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Řešení. V sumačním zápisu je výraz $1 + x + \cdots + x^n$ zapsán jako

$$\sum_{i=0}^{n} x^i.$$

Budeme postupovat indukcí podle n.

Základní krok ($n = 0$) Máme dokázat rovnost

$$\sum_{i=0}^{0} x^i = \frac{x^0 - 1}{x - 1}.$$

Obě strany jsou rovny nule, rovnost tedy platí.

Indukční krok Pro dané n máme indukční předpoklad

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Chceme dokázat rovnost

$$\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}.$$

Postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} x^i &= \sum_{i=0}^{n} x^i + x^{n+1} \\
&= \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1} \\
&= \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + \frac{x^{n+1}(x-1)}{x-1} \\
&= \frac{x^{n+1}-1+x^{n+1}(x-1)}{x-1} \\
&= \frac{x^{n+1}-1+x^{n+2}-x^{n+1}}{x-1} \\
&= \frac{x^{n+2}-1}{x-1},
\end{aligned}$$

kde popořadě využíváme definice sumy, indukční předpoklad, a poté provádíme snadné algebraické úpravy. Chtěnou rovnost jsme tedy dokázali.

Rovnost ze zadání tedy využitím principu matematické indukce platí pro všechna přirozená čísla.

Bonus: druhá část úlohy 2 Dokažte, že nerovnost

$$\sqrt{0} + \sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$$

platí pro všechna přirozená n.

Řešení. V sumačním zápisu je výraz $\sqrt{0} + \sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n}$ zapsán jako

$$\sum_{i=0}^{n} \sqrt{i}.$$

Budeme postupovat indukcí podle n.

Základní krok ($n = 0$) Máme dokázat nerovnost

$$\sum_{i=0}^{0} \sqrt{i} < \frac{2}{3}(0+1)\sqrt{0+1}.$$

Levá strana je rovna nule, pravá strana je rovna číslu $\frac{2}{3}$, nerovnost tedy platí.

Indukční krok Pro dané n máme indukční předpoklad

$$\sum_{i=0}^{n} \sqrt{i} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}.$$

Chceme dokázat nerovnost

$$\sum_{i=0}^{n+1} \sqrt{i} < \frac{2}{3}(n+2)\sqrt{n+2}.$$

Jelikož

$$\sum_{i=0}^{n+1} \sqrt{i} = \sum_{i=0}^{n} \sqrt{i} + \sqrt{n+1} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} = (\frac{2}{3}(n+1)+1)\sqrt{n+1}$$

(první rovnost plyne z rozvoje sumy, nerovnost z indukčního předpokladu, druhá rovnost je pouze úpravou výrazu), ověřujeme nerovnost

$$\frac{2}{3}(n+\frac{5}{2})\sqrt{n+1} < \frac{2}{3}(n+2)\sqrt{n+2}.$$

Ekvivalentně lze ověřovat nerovnost

$$(n+\frac{5}{2})\sqrt{n+1} < (n+2)\sqrt{n+2},$$

a jelikož je operace mocnění na druhou rostoucí, lze místo výše zmíněné nerovnosti ověřovat nerovnost

$$(n+\frac{5}{2})^2\sqrt{n+1}^2 < (n+2)^2\sqrt{n+2}^2,$$

tedy nerovnost

$$(n+\frac{5}{2})^2(n+1) < (n+2)^2(n+2).$$

Roznásobením tedy zjišťujeme, zda

$$n^3 + 6n^2 + \frac{45}{4}n + \frac{25}{4} < n^3 + 6n^2 + 12n + 8.$$

Jelikož je n přirozené číslo, tato nerovnost zjevně (porovnáním koeficientů u jednotlivých členů) platí.

Nerovnost ze zadání tedy využitím principu matematické indukce platí pro všechna přirozená čísla.