Metro chaosu (lze vynechat)

Ať symbol B označuje binární predikát „bouchnout do“, tedy $B(x, y)$ označuje „x bouchnul do y“. Propojte následující sentence predikátové logiky s pro ně nejvhodnějšími popisy v přirozeném jazyce:

$\exists x \exists y B(x, y)$	Metro chaosu!
$\exists x \forall y B(x, y)$	Někdo blokoval jediný východ.
$\forall x \exists y B(x, y)$	To se stává.
$\forall x \forall y B(x, y)$	Nevychované dítě proběhlo metrem.
$\exists y \forall x B(x, y)$	Každý utrpěl.
$\forall y \exists x B(x, y)$	Přeplněné metro.

Řešení. Nejpřiléhavější věty přiřadíme následovně:

$\exists x \exists y B(x, y)$	To se stává.
$\exists x \forall y B(x, y)$	Nevychované dítě proběhlo metrem.
$\forall x \exists y B(x, y)$	Přeplněné metro.
$\forall x \forall y B(x, y)$	Metro chaosu!
$\exists y \forall x B(x, y)$	Někdo blokoval jediný východ.
$\forall y \exists x B(x, y)$	Každý utrpěl.

□

Formalisace českých vět Je dán jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ s množinou proměnných $\mathsf{Var} = \{x, y, z\}$, jehož množina predikátových symbolů je

$$\mathsf{Pred} = \{Obd, Nav, Prof, Stud, P\},$$

množina konstantních symbolů je $\mathsf{Kons} = \{m\}$ a množina funkčních symbolů je prázdná. Arita symbolů Obd a Nav je 2, arita symbolů $Prof$, $Stud$ a P je 1.

Predikátové symboly mají popořadě formalisovat následující vztahy mezi jsoucny z přirozeného jazyka:

$Obd(x, y)$	x obdivuje y,
$Nav(x, y)$	x navštívil(a) y,
$Prof(x)$	x je profesor(ka),
$Stud(x)$	x je student(ka),
$P(x)$	x je přednáška.

Konstantní symbol m odkazuje na nějakou (konkrétní) Marii.

Přeložte co nejvěrněji následující věty z češtiny do jazyka $\mathcal{L}$ predikátové logiky.

1. Marie obdivuje všechny profesory.
2. Nějaký profesor obdivuje Marii.
3. Marie se obdivuje.
4. Žádný student nenavštívil všechny přednášky.
5. Žádnou přednášku nenavštívili všichni studenti.
6. Není přednášky, kterou by nenavštívil ani jeden student.

Řešení. Jednotlivé věty formalisujeme následovně:

1. $\forall x(Prof(x) \Rightarrow Obd(m, x))$. (Velmi častá chyba: $\forall x Obd(m, Prof(x))$.)
2. $\exists x(Prof(x) \wedge Obd(x, m))$.
3. $Obd(m, m)$.
4. Negativně:
$$\neg(\exists x(Stud(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow Nav(x, y)))).$$
Positivně:
$$\forall x(Stud(x) \Rightarrow \exists y(P(y) \wedge \neg Nav(x, y))).$$
5. Negativně:
$$\neg(\exists y(P(y) \wedge \forall x(Stud(x) \Rightarrow Nav(x, y)))).$$
6. Negativně:
$$\neg(\exists y(P(y) \wedge \forall x(Stud(x) \Rightarrow \neg Nav(x, y)))).$$

$\square$

Sémantika predikátové logiky

Úloha 1. Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\mathsf{Pred} &= \{P, Q, R\},\\ ar(P) &= ar(Q) = 1, ar(R) = 2,\\ \mathsf{Func} &= \{f\}, ar(f) = 1,\\ \mathsf{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N}\\ [\![P]\!] &= \{0, 3, 12\}\\ [\![Q]\!] &= \{4 \cdot z \mid z \in \mathbb{N}\}\\ [\![R]\!] &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\}\\ [\![f]\!] &: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\\ &\quad n \mapsto n + 5\\ [\![a]\!] &= 2\end{aligned}$$

Vyhodnoťte termy $f(f(a))$ a $f(f(x))$ v kontextu proměnných

$$\begin{aligned}\tau : \{x\} &\to \mathbb{N}\\ x &\mapsto 3.\end{aligned}$$

Řešení. 1. $[\![f(f(a))]\!]_\tau = 12$.

2. $[\![f(f(x))]\!]_\tau = 13$.

□

Rozhodněte, které z následujících formulí jsou pravdivé v kontextu proměnných

$$\begin{aligned}\rho : \{x, y\} &\to \mathbb{N}\\ x &\mapsto 3,\\ y &\mapsto 4\end{aligned}$$

1. $R(y, x)$.

2. $P(x) \wedge R(f(x), y)$.

3. $\forall z(Q(z) \Rightarrow R(x, z))$.

Řešení. 1. Platí $I \models_\rho R(y, x)$? Platí $4 < 3$? Ne.

2. Platí $I \models_\rho P(x) \wedge R(f(x), y)$? Tj., platí $I \models_\rho P(x)$ a $I \models_\rho R(f(x), y)$? Tj., platí $3 \in [\![P]\!]$ a $3 + 5 < 4$? První ano a druhé ne, tedy celá konjunkce v interpretaci I a kontextu proměnných ρ pravdivá není.

3. Platí $U \models_\rho \forall z(Q(z) \Rightarrow R(x, z))$? Tj., platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, že

$$I \models_{\rho[z:=n]} Q(z) \Rightarrow R(x, z)?$$

Ne, vezměme $n = 0$. Pak sice $0 \in [\![Q]\!]$ (0 je dělitelná čtyřmi), ale není pravda $3 < 0$. Implikace tedy není pravdivá.

□

Nalezněte význam $[\![\varphi]\!]_D$ pro následující formule φ a seznamy deklarovaných formulí D:

1. $R(a, y)$ pro $D = (y)$.

2. $\exists y(P(y) \wedge R(x, y))$ pro $D = (x)$.

3. $(P(x) \wedge Q(x)) \wedge R(y, f(x))$ pro $D = (x, y)$

Řešení. Zopakujme si definici významu formule.

Ať $D = (x_1, \ldots, x_n)$ je *seznam deklarovaných proměnných*, tedy

$$x_1, \ldots, x_n \in \mathsf{Var}$$

a žádná proměnná nechť se v seznamu D neopakuje.

Pak význam formule φ v interpretaci $I = (U, [\![-]\!])$, pro kterou platí $\mathrm{free}(\varphi) \subseteq D$ (tj. každá volná proměnná formule φ se vyskytuje v seznamu D), je definován jako množina

$$[\![\varphi]\!]_D = \{(\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n)) \in U^n \mid \rho : D \to U, I \models_\rho \varphi\}.$$

Zjednodušeně a nepřesně řečeno: jsou to ty n-tice prvků universa U, které můžeme „dosadit za proměnné $x_1, \ldots, x_n$“ tak, aby pak byla φ v I pravdivá.

Současně, pokud $D = (x)$, tedy je deklarovaná jediná proměnná, seznam často nezapisujeme jako množinu 1-tic z U^1, ale jako množinu prvků z U, tedy

$$[\![\varphi]\!]_{(x)} = \{u \in U \mid I \vDash_{x:=u} \varphi\}.$$

Zde zápisem $x := u$ míníme kontext proměnných

$$\begin{aligned}\rho : \{x\} &\to U \\ x &\mapsto u.\end{aligned}$$

1.

$$\begin{aligned}[\![R(a,y)]\!]_D &= \{n \in \mathbb{N} \mid I \vDash_{y:=n} R(a,y)\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid ([\![a]\!], n) \in [\![R]\!]\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid 2 < n\}.\end{aligned}$$

Významem formule $R(a,y)$ (když je deklarována pouze proměnná y) v interpretaci I je tedy množina všech přirozených čísel větších než 2.

2.

$$\begin{aligned}[\![\exists y(P(y) \wedge R(x,y))]\!]_D &= \{\rho(x) \in \mathbb{N} \mid \rho : \{x\} \to \mathbb{N}, I \vDash_\rho \exists y(P(y) \wedge R(x,y))\} \\ &= \{\rho(x) \in \mathbb{N} \mid \rho : \{x\} \to \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, I \vDash_{\rho[y:=m]} P(y) \wedge R(x,y)\} \\ &= \{\tau(x) \in \mathbb{N} \mid \tau : \{x,y\} \to \mathbb{N}, I \vDash_\tau P(y) \wedge R(x,y)\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid \text{existuje } m \in \mathbb{N} : m \in [\![P]\!] \text{ a } (n,m) \in [\![R]\!]\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid \text{existuje } m \in \{0,3,12\} : n < m\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid n < 12\} \\ &= \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}.\end{aligned}$$

Významem formule $\exists y(P(y) \wedge R(x,y))$ je množina všech přirozených čísel menších než 12.

3.

$$\begin{aligned}[\![(P(x) \wedge Q(x)) \wedge R(y, f(x))]\!]_D = \{(\rho(x), \rho(y)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \\ \rho : \{x,y\} \to \mathbb{N}, I \vDash_\rho (P(x) \wedge Q(x)) \wedge R(y, f(x))\} \\ = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \in [\![P]\!], n \in [\![Q]\!], (m, n+5) \in [\![R]\!]\} \\ = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \in \{0,12\}, m < n+5\} \\ = \{(0,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \in \{0,1,\ldots,4\}\} \cup \\ \cup \{(12,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \in \{0,1,\ldots,16\}\}.\end{aligned}$$

$\square$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x \forall y(R(x, y) \Rightarrow P(x))$.
2. $\exists x R(a, x)$.
3. $\exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \Rightarrow R(x, y)))$.
4. $\forall x \exists y(R(x, y) \wedge P(f(x)))$.
5. $\exists y \forall x(Q(x) \Rightarrow R(y, f(x)))$.

Řešení.

1. Ne.
2. Ano.
3. Ne.
4. Ne.
5. Ano.

$\square$

Úloha 2. Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2,\\
\mathsf{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2,\\
\mathsf{Kons} &= \{a\}.
\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně:

$$\begin{aligned}
U &= \mathbb{R}\\
[\![P]\!] &= \{-5, \frac{1}{5}\}\\
[\![R]\!] &= \{(m, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid m < n\}\\
[\![g]\!] &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\\
&(m, n) \mapsto m \cdot n\\
[\![a]\!] &= -1
\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $R(a, g(a, a))$.
2. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
3. $\exists x(P(x) \wedge R(a, g(x, x)))$.
4. $\forall x(R(x, a) \Rightarrow \exists z(R(g(a, z), x)))$.
5. $\exists y \forall x(P(x) \Rightarrow R(g(y, y), x))$.

Úloha 3. V jakém jazyce je

$$\varphi = \forall x P(f(x, c))$$

sentencí? Vymyslete jednu interpretaci, ve které je φ pravdivá, a jednu interpretaci, ve které je φ nepravdivá.

Úloha 4. Ukažte, že sentence (v jakém jazyce je to sentence?)

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(f(x))) \wedge (\forall x P(x)) \wedge (\exists x \neg Q(x))$$

je splnitelná.