

Příklady k procvičení přirozené dedukce

Zde naleznete seznam základních odvozovacích pravidel pro přirozenou dedukci, a dále příklady k procvičení důkazů přirozenou dedukcí. Příklady jsem převzal ze cvičebnice [1]. V celém textu je množinou atomických formulí množina

$$At = \{p, q, r, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2\}.$$

Pokud naleznete v řešení chybu, ohlaste mi ji prosím e-mailem.

Za zpracování řešení (či alternativního řešení) mnoha úloh děkuji Filipu Korfovi, Vojtěchu Michalovi, Karolíně Sehnalové a Adamu Rojíkovi.

Za odhalené překlepy a chyby děkuji Adamu Rojíkovi, Marii Zlámalové, Mariji Pajdakovič, Karolíně Sehnalové a Andreiovi Mamaevovi.

Spojka	Zavedení spojky	Eliminace spojky
\wedge	$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} i\wedge$	$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} e\wedge_1 \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} e\wedge_2$
\vee	$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} i\vee_1 \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} i\vee_2$	$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{ c } \hline \varphi \\ \vdots \\ \chi \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c } \hline \psi \\ \vdots \\ \chi \\ \hline \end{array}}{\chi} e\vee$
\Rightarrow	$\frac{\begin{array}{ c } \hline \varphi \\ \vdots \\ \psi \\ \hline \end{array}}{\varphi \Rightarrow \psi} i\Rightarrow$	$\frac{\varphi \quad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi} e\Rightarrow$
\Leftrightarrow	$\frac{\begin{array}{ c } \hline \varphi \\ \vdots \\ \psi \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c } \hline \psi \\ \vdots \\ \varphi \\ \hline \end{array}}{\varphi \Leftrightarrow \psi} i\Leftrightarrow$	$\frac{\varphi \quad \varphi \Leftrightarrow \psi}{\psi} e\Leftrightarrow_1 \quad \frac{\varphi \Leftrightarrow \psi \quad \psi}{\varphi} e\Leftrightarrow_2$
\neg	$\frac{\begin{array}{ c } \hline \varphi \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \end{array}}{\neg \varphi} i\neg$	$\frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} e\neg$
\top	$\frac{}{\top} i\top$	není
\perp	není	$\frac{}{\perp} e\perp$
$\neg\neg$	(netřeba) $\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi} i\neg\neg$	$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi} e\neg\neg$

Pomocné pravidlo: pravidlo iterace (it).

Odvozené pravidlo LEM (zákon vyloučeného třetího, tertium non datur):

$$\frac{}{\varphi \vee \neg \varphi} \text{LEM}$$

1 Konjunkce

1. $p, q \vdash p \wedge q$

Důkaz:

1. p P
2. q P
3. $p \wedge q$ $i\wedge, 1, 2$

2. $(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3 \vdash p_2$

Důkaz:

1. $(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3$ P
2. $p_1 \wedge p_2$ $e\wedge_1, 1$
3. p_2 $e\wedge_2, 2$

3. $p \wedge q \vdash q \wedge p$

Důkaz:

1. $p \wedge q$ P
2. p $e\wedge_1, 1$
3. q $e\wedge_2, 1$
4. $q \wedge p$ $i\wedge, 3, 2$

4. $q \wedge p, r \vdash p \wedge (r \wedge q)$

Důkaz:

1. $q \wedge p$ P
2. r P
3. q $e\wedge_1, 1$
4. p $e\wedge_2, 1$
5. $r \wedge q$ $i\wedge, 2, 3$
6. $p \wedge (r \wedge q)$ $i\wedge, 4, 5$

5. $p_1 \wedge p_2, (q_1 \wedge q_2) \wedge r \vdash (p_1 \wedge q_2) \wedge r$

Důkaz:

1. $p_1 \wedge p_2$ P
2. $(q_1 \wedge q_2) \wedge r$ P
3. p_1 $e\wedge_1, 1$
4. $q_1 \wedge q_2$ $e\wedge_1, 2$
5. q_2 $e\wedge_2, 4$
6. r $e\wedge_2, 2$
7. $p_1 \wedge q_2$ $i\wedge, 3, 5$
8. $(p_1 \wedge q_2) \wedge r$ $i\wedge_7, 6$

6. $p \wedge (q \wedge r) \vdash (r \wedge p) \wedge q$

Důkaz:

1. $p \wedge (q \wedge r)$ P
2. p $e\wedge_1, 1$
3. $q \wedge r$ $e\wedge_2, 1$
4. q $e\wedge_1, 3$
5. r $e\wedge_2, 3$
6. $r \wedge p$ $i\wedge, 5, 2$
7. $(r \wedge p) \wedge q$ $i\wedge, 6, 4$

2 Implikace

1. $\vdash p \Rightarrow p$

Důkaz:

1.

p	P
-----	---
2.

p	$it, 1$
-----	---------
3. $p \Rightarrow p$ $i\Rightarrow, 1-2$

2. $\vdash p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

Důkaz:

1.	p	P
2.	q	P
3.	p	it, 1
4.	$q \Rightarrow p$	$i \Rightarrow, 2-3$
5.	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	$i \Rightarrow, 1-4$

3. $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$

Důkaz:

1.	$p \Rightarrow q$	P
2.	$q \Rightarrow r$	P
3.	p	P
4.	q	$e \Rightarrow, 3, 1$
5.	r	$e \Rightarrow, 4, 2$
6.	$p \Rightarrow r$	$i \Rightarrow, 3-5$

4. $\vdash p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$

Důkaz:

1.	p	P
2.	$p \Rightarrow q$	P
3.	q	$e \Rightarrow, 1, 2$
4.	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	$i \Rightarrow, 2-3$
5.	$p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$	$i \Rightarrow, 1-4$

5. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \vdash q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Důkaz:

1.	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	P
2.	q	P
3.	p	P
4.	q	it, 2
5.	$p \Rightarrow q$	$i \Rightarrow, 3-4$
6.	$p \Rightarrow r$	$e \Rightarrow, 5, 1$
7.	$q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	$i \Rightarrow, 2-6$

6. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \vdash q \Rightarrow p$

Důkaz:

1.	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$	P
2.	q	P
3.	p	P
4.	q	it, 2
5.	$p \Rightarrow q$	$i \Rightarrow, 3-4$
6.	p	$e \Rightarrow, 5, 1$
7.	$q \Rightarrow p$	

7. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \vdash q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Důkaz:

1.	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	P
2.	q	P
3.	p	P
4.	$q \Rightarrow r$	$e \Rightarrow, 3, 1$
5.	r	$e \Rightarrow, 2, 4$
6.	$p \Rightarrow r$	$i \Rightarrow, 3-5$
7.	$q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	$i \Rightarrow, 2-6$

$$8. p \Rightarrow (q \Rightarrow r), p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow r$$

Důkaz:

1.	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	P
2.	$p \Rightarrow q$	P
3.	p	P
4.	$q \Rightarrow r$	$e \Rightarrow, 3, 1$
5.	q	$e \Rightarrow, 3, 2$
6.	r	$e \Rightarrow, 5, 4$
7.	$p \Rightarrow r$	$i \Rightarrow, 3-6$

$$9. (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \vdash (q \Rightarrow r) \Rightarrow r$$

Důkaz:

1.	$(p \Rightarrow p) \Rightarrow q$	P
2.	p	P
3.	$p \Rightarrow p$	$i \Rightarrow, 2-2$
4.	q	$e \Rightarrow, 3, 1$
5.	$q \Rightarrow r$	P
6.	r	$e \Rightarrow, 4, 5$
7.	$(q \Rightarrow r) \Rightarrow r$	$i \Rightarrow, 5-6$

$$10. \vdash (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

Důkaz: Označme formuli $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ jako φ .

1.	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$	P
2.	$p \Rightarrow q$	P
3.	p	P
4.	q	$e \Rightarrow, 3, 2$
5.	$q \Rightarrow r$	$e \Rightarrow, 3, 1$
6.	r	$e \Rightarrow, 4, 5$
7.	$p \Rightarrow r$	$i \Rightarrow, 3-6$
8.	$((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	$i \Rightarrow, 2-7$
9.	φ	$i \Rightarrow, 1-8$

2.1 Implikace a konjunkce

$$1. p \wedge q \vdash p \Rightarrow q$$

Důkaz:

1.	$p \wedge q$	P
2.	p	P
3.	q	$e \wedge_2, 1$
4.	$p \Rightarrow q$	$i \Rightarrow, 2-3$

$$2. \vdash (p \wedge q) \Rightarrow p$$

Důkaz:

1.	$p \wedge q$	P
2.	p	$e \wedge_1 1$
3.	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	$i \Rightarrow, 1-2$

$$3. p \Rightarrow (q \wedge r) \vdash p \Rightarrow q$$

Důkaz:

1. $p \Rightarrow (q \wedge r)$ P
2.

p	P
-----	---
3.

$q \wedge r$	$e \Rightarrow, 2, 1$
--------------	-----------------------
4.

q	$e \wedge_1, 3$
-----	-----------------
5. $p \Rightarrow q$ $i \Rightarrow, 2-4$

$$4. ((p \wedge q) \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \vdash q \Rightarrow p$$

Důkaz:

1. $((p \wedge q) \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ P
2.

$p \wedge q$	P
--------------	---
3.

q	$e \wedge_2, 2$
-----	-----------------
4. $(p \wedge q) \Rightarrow q$ $i \Rightarrow, 2-3$
5. $q \Rightarrow p$ $e \Rightarrow, 4, 1$

$$5. (p \wedge q) \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

Důkaz:

1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$ P
2.

p	P
-----	---
3.

q	P
-----	---
4.

$p \wedge q$	$i \wedge, 2, 3$
--------------	------------------
5.

r	$e \Rightarrow, 4, 1$
-----	-----------------------
6.

$q \Rightarrow r$	$i \Rightarrow, 3-5$
-------------------	----------------------
7. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ $i \Rightarrow, 2-6$

$$6. (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \vdash p \Rightarrow (q \wedge r)$$

Důkaz:

1. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ P
2. $p \Rightarrow q$ $e \wedge_1, 1$
3. $p \Rightarrow r$ $e \wedge_2, 1$
4.

p	P
-----	---
5.

q	$e \Rightarrow, 4, 2$
-----	-----------------------
6.

r	$e \Rightarrow, 4, 3$
-----	-----------------------
7.

$q \wedge r$	$i \wedge, 5, 6$
--------------	------------------
8. $p \Rightarrow (q \wedge r)$ $i \Rightarrow, 4-7$

$$7. p \Rightarrow (q \wedge r) \vdash (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$$

Důkaz:

1. $p \Rightarrow (q \wedge r)$ P
2.

p	P
-----	---
3.

$q \wedge r$	$e \Rightarrow, 2, 1$
--------------	-----------------------
4.

q	$e \wedge_1, 3$
-----	-----------------
5. $p \Rightarrow q$ $i \Rightarrow, 2-4$
6.

p	P
-----	---
7.

$q \wedge r$	$e \Rightarrow, 6, 1$
--------------	-----------------------
8.

r	$e \wedge_2, 7$
-----	-----------------
9. $p \Rightarrow r$ $i \Rightarrow, 6-8$
10. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ $i \wedge, 5, 9$

3 Disjunkce

1. $p \vee q \vdash q \vee p$

1. $p \vee q$ P
2.

p	P
-----	---
3.

$q \vee p$	$i\vee_{2,2}$
------------	---------------
4.

q	P
-----	---
5.

$q \vee p$	$i\vee_{1,4}$
------------	---------------
6. $q \vee p$ e \vee , 1, 2-3, 4-5

2. $p \vee q \vdash p \vee (q \vee r)$

Důkaz:

1. $p \vee q$ P
2.

p	P
-----	---
3.

$p \vee (q \vee r)$	$i\vee_{1,2}$
---------------------	---------------
4.

q	P
-----	---
5.

$q \vee r$	$i\vee_{1,4}$
------------	---------------
6.

$p \vee (q \vee r)$	$i\vee_{2,5}$
---------------------	---------------
7. $p \vee (q \vee r)$ e \vee , 1, 2-3, 4-6

3. $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

1. $(p \vee q) \vee r$ P
2.

r	P
-----	---
3.

$q \vee r$	$i\vee_{2,2}$
------------	---------------
4.

$p \vee (q \vee r)$	$i\vee_{2,3}$
---------------------	---------------
5.

$p \vee q$	P
------------	---
6.

p	P
-----	---
7.

$p \vee (q \vee r)$	$i\vee_{1,6}$
---------------------	---------------
8.

q	P
-----	---
9.

$q \vee r$	$i\vee_{1,8}$
------------	---------------
10.

$p \vee (q \vee r)$	$i\vee_{2,9}$
---------------------	---------------
11. $p \vee (q \vee r)$ e \vee , 5, 6-7, 8-10
12. $p \vee (q \vee r)$ e \vee , 1, 5-11, 2-4

4. $(p \vee q) \vee (r \vee p_1) \vdash (p \vee p_1) \vee (r \vee q)$

Důkaz:

1. $(p \vee q) \vee (r \vee p_1)$ P
2.

$p \vee q$	P
------------	---
3.

p	P
-----	---
4.

$p \vee p_1$	$i\vee_{1,3}$
--------------	---------------
5.

$(p \vee p_1) \vee (r \vee q)$	$i\vee_{1,4}$
--------------------------------	---------------
6.

q	P
-----	---
7.

$r \vee q$	$i\vee_{2,6}$
------------	---------------
8.

$(p \vee p_1) \vee (r \vee q)$	$i\vee_{2,7}$
--------------------------------	---------------
9. $(p \vee p_1) \vee (r \vee q)$ e \vee , 2, 3-5, 6-8
10.

$r \vee p_1$	P
--------------	---
11.

r	P
-----	---
12.

$r \vee q$	$i\vee_{1,11}$
------------	----------------
13.

$(p \vee p_1) \vee (r \vee q)$	$i\vee_{2,12}$
--------------------------------	----------------
14.

p_1	P
-------	---
15.

$p \vee p_1$	$i\vee_{2,14}$
--------------	----------------
16.

$(p \vee p_1) \vee (r \vee q)$	$i\vee_{1,15}$
--------------------------------	----------------
17. $(p \vee p_1) \vee (r \vee q)$ e \vee , 10, 11-13, 14-16
18. $(p \vee p_1) \vee (r \vee q)$ e \vee , 1, 2-9, 10-17

3.1 Disjunkce a konjunkce

1. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Důkaz:

1.	$p \wedge (q \vee r)$	P
2.	p	$e\wedge_1, 1$
3.	$q \vee r$	$e\wedge_2, 1$
4.	q	P
5.	$p \wedge q$	$i\wedge, 2, 4$
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$i\vee_1, 5$
7.	r	P
8.	$p \wedge r$	$i\wedge, 2, 7$
9.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$i\vee_2, 8$
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$e\vee, 3, 4-6, 7-9$

2. $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$

Důkaz:

1.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	P
2.	$p \vee q$	$e\wedge_1, 1$
3.	$p \vee r$	$e\wedge_2, 1$
4.	p	P
5.	$p \vee (q \wedge r)$	$i\vee_1, 4$
6.	q	P
7.	p	P
8.	$p \vee (q \wedge r)$	$i\vee_1, 7$
9.	r	P
10.	$q \wedge r$	$i\wedge, 6, 9$
11.	$p \vee (q \wedge r)$	$i\vee_2, 10$
12.	$p \vee (q \wedge r)$	$e\vee, 3, 7-8, 9-11$
13.	$p \vee (q \wedge r)$	$e\vee, 2, 4-5, 6-12$

3. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

Důkaz:

1.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	P
2.	$p \wedge q$	P
3.	p	$e\wedge_1, 2$
4.	q	$e\wedge_2, 2$
5.	$q \vee r$	$i\vee_1, 4$
6.	$p \wedge (q \vee r)$	$i\wedge, 3, 5$
7.	$p \wedge r$	P
8.	p	$e\wedge_1, 7$
9.	r	$e\wedge_2, 7$
10.	$q \vee r$	$i\vee_2, 9$
11.	$p \wedge (q \vee r)$	$i\wedge, 8, 10$
12.	$p \wedge (q \vee r)$	$e\vee, 1, 2-6, 7-11$

4. $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Důkaz:

1.	$p \vee (q \wedge r)$	P
2.	p	P
3.	$p \vee q$	$i\vee_1, 2$
4.	$p \vee r$	$i\vee_1, 2$
5.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$i\wedge, 3, 4$
6.	$q \wedge r$	P
7.	q	$e\wedge_1, 6$
8.	r	$e\wedge_2, 6$
9.	$p \vee q$	$i\vee_2, 7$
10.	$p \vee r$	$i\vee_2, 8$
11.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$i\wedge, 9, 10$
12.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$e\vee, 1, 2-5, 6-11$

3.2 Disjunkce a implikace

1. $(p \Rightarrow q) \vee q \vdash p \Rightarrow q$

Důkaz:

1.	$(p \Rightarrow q) \vee q$	P
2.	$p \Rightarrow q$	P
3.	q	P
4.	p	P
5.	q	it, 3
6.	$p \Rightarrow q$	$i \Rightarrow, 4-5$
7.	$p \Rightarrow q$	$e \vee, 1, 2-2, 3-6$

2. $p \vee q \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

Důkaz:

1.	$p \vee q$	P
2.	$p \Rightarrow q$	P
3.	p	P
4.	q	$e \Rightarrow, 3, 2$
5.	q	P
6.	q	$e \vee, 1, 3-4, 5-5$
7.	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	$i \Rightarrow, 2-6$

3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \vdash (p \vee r) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

Důkaz:

1.	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	P
2.	$p \vee r$	P
3.	p	P
4.	q	P
5.	p	P
6.	q	it, 4
7.	$p \Rightarrow q$	$i \Rightarrow, 5-6$
8.	$p \Rightarrow r$	$e \Rightarrow, 7, 1$
9.	r	$e \Rightarrow, 3, 8$
10.	$q \Rightarrow r$	$i \Rightarrow, 4-9$
11.	r	P
12.	q	P
13.	r	it, 11
14.	$q \Rightarrow r$	$i \Rightarrow, 12-13$
15.	$q \Rightarrow r$	$e \vee, 2, 3-10, 11-14$
16.	$(p \vee r) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$i \Rightarrow, 2-15$

$$4. (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \vdash p \Rightarrow (q \vee r)$$

Důkaz:

1.	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$	P
2.	p	P
3.	$p \Rightarrow q$	P
4.	q	$e \Rightarrow, 2, 3$
5.	$q \vee r$	$i \vee_1, 4$
6.	$p \Rightarrow r$	P
7.	r	$e \Rightarrow, 2, 6$
8.	$q \vee r$	$i \vee_2, 7$
9.	$q \vee r$	$e \vee, 2, 3-5, 6-8$
10.	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$i \Rightarrow, 2-9$

Alternativní důkaz:

1.	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$	P
2.	$p \Rightarrow q$	P
3.	p	P
4.	q	$e \Rightarrow, 3, 2$
5.	$q \vee r$	$i \vee_1, 4$
6.	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$i \Rightarrow, 3-5$
7.	$p \Rightarrow r$	P
8.	p	P
9.	r	$e \Rightarrow, 8, 7$
10.	$q \vee r$	$i \vee_2, 9$
11.	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$i \Rightarrow, 8-10$
12.	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$e \vee, 1, 2-6, 7-11$

3.3 Disjunkce, konjunkce a implikace

$$1. (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \vdash (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$$

Důkaz:

1.	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	P
2.	$(p \Rightarrow q)$	$e \wedge_1, 1$
3.	$(q \Rightarrow p)$	$e \wedge_2, 1$
4.	$p \vee q$	P
5.	p	P
6.	q	$e \Rightarrow, 5, 2$
7.	$p \wedge q$	$i \wedge_5, 6$
8.	q	P
9.	p	$e \Rightarrow, 8, 3$
10.	$p \wedge q$	$i \wedge_9, 8$
11.	$p \wedge q$	$e \vee, 4, 5-7, 8-10$
12.	$(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$	$i \Rightarrow, 4-11$

$$2. (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q) \vdash (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Důkaz:

1.	$(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$	P
2.	p	P
3.	$p \vee q$	$i \vee_1, 2$
4.	$p \wedge q$	$e \Rightarrow, 3, 1$
5.	q	$e \wedge_2, 4$
6.	q	P
7.	$p \vee q$	$i \vee_2, 6$
8.	$p \wedge q$	$e \Rightarrow, 7, 1$
9.	p	$e \wedge_1, 8$
10.	$p \Rightarrow q$	$i \Rightarrow, 2-5$
11.	$q \Rightarrow p$	$i \Rightarrow, 6-9$
12.	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$i \wedge, 10, 11$

$$3. (q \Rightarrow r) \wedge (q \vee p) \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \wedge q)$$

Důkaz:

1. $(q \Rightarrow r) \wedge (q \vee p)$ P
2. $q \Rightarrow r$ $e\wedge_1, 1$
3. $q \vee p$ $e\wedge_2, 1$
4.

$p \Rightarrow q$	P
-------------------	---
5.

q	P
-----	---
6.

r	$e\Rightarrow, 5, 2$
-----	----------------------
7.

$r \wedge q$	$i\wedge, 6, 5$
--------------	-----------------
8.

p	P
-----	---
9.

q	$e\Rightarrow, 8, 4$
-----	----------------------
10.

r	$e\Rightarrow, 9, 2$
-----	----------------------
11.

$r \wedge q$	$i\wedge, 10, 9$
--------------	------------------
12.

$r \wedge q$	$e\vee, 3, 5-7, 8-11$
--------------	-----------------------
13. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \wedge q)$ $i\Rightarrow, 4-12$

4 Ekvivalence

$$1. p \Leftrightarrow q \vdash q \Leftrightarrow p$$

Důkaz:

1. $p \Leftrightarrow q$ P
2.

q	P
-----	---
3.

p	$e\Leftrightarrow_2, 1, 2$
-----	----------------------------
4.

p	P
-----	---
5.

q	$e\Leftrightarrow_1, 4, 1$
-----	----------------------------
6. $q \Leftrightarrow p$ $i\Leftrightarrow, 2-3, 4-5$

$$2. p, (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r \vdash q \Leftrightarrow r$$

Důkaz:

1. p P
2. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$ P
3.

q	P
-----	---
4.

p	P
-----	---
5.

q	$it, 3$
-----	---------
6.

q	P
-----	---
7.

p	$it, 1$
-----	---------
8. $p \Leftrightarrow q$ $i\Leftrightarrow, 4-5, 6-7$
9. r $e\Leftrightarrow_1, 8, 2$
10.

r	P
-----	---
11. $p \Leftrightarrow q$ $e\Leftrightarrow_2, 2, 10$
12. q $e\Leftrightarrow_1, 1, 11$
13. $q \Leftrightarrow r$ $i\Leftrightarrow, 3-9, 10-12$

$$3. \vdash (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$$

Důkaz:

1.	$p \Leftrightarrow q$	P
2.	q	P
3.	p	$e \Leftrightarrow_2, 1, 2$
4.	p	P
5.	q	$e \Leftrightarrow_1, 4, 1$
6.	$q \Leftrightarrow p$	$i \Leftrightarrow, 2-3, 4-5$
7.	$q \Leftrightarrow p$	P
8.	p	P
9.	q	$e \Leftrightarrow_2, 7, 8$
10.	q	P
11.	p	$e \Leftrightarrow_1, 10, 7$
12.	$p \Leftrightarrow q$	$i \Leftrightarrow, 8-9, 10-11$
13.	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p) \quad i \Leftrightarrow, 1-6, 7-12$	

4.1 Ekvivalence s dalšími spojky

$$1. (p \vee q) \Leftrightarrow q \vdash p \Rightarrow q$$

Důkaz:

1.	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$	P
2.	p	P
3.	$p \vee q$	$i \vee_1, 2$
4.	q	$e \Leftrightarrow_1, 3, 1$
5.	$p \Rightarrow q$	$i \Rightarrow, 2-4$

$$2. (p \wedge q) \Leftrightarrow p \vdash p \Rightarrow q$$

Důkaz:

1.	$(p \wedge q) \Leftrightarrow p$	P
2.	p	P
3.	$p \wedge q$	$e \Leftrightarrow_2, 1, 2$
4.	q	$e \wedge_2, 3$
5.	$p \Rightarrow q$	$i \Rightarrow, 2-4$

$$3. p \Rightarrow q \vdash (p \vee q) \Leftrightarrow q$$

Důkaz:

1.	$p \Rightarrow q$	P
2.	q	P
3.	$p \vee q$	$i \vee_2, 2$
4.	$p \vee q$	P
5.	q	P
6.	p	P
7.	q	$e \Rightarrow, 6, 1$
8.	q	$e \vee, 4, 6-7, 5$
9.	$(p \vee q) \Leftrightarrow q \quad i \Leftrightarrow, 4-8, 2-3$	

$$4. p \Rightarrow q \vdash (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

Důkaz:

1.	$p \Rightarrow q$	P
2.	p	P
3.	q	$e \Rightarrow, 2, 1$
4.	$p \wedge q$	$i \wedge, 2, 3$
5.	$p \wedge q$	P
6.	p	$e \wedge_1, 5$
7.	$(p \wedge q) \Leftrightarrow p \quad i \Leftrightarrow, 5-6, 2-4$	

5. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \vdash p \Leftrightarrow q$

Důkaz:

- | | | |
|----|--|------------------------------|
| 1. | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ | P |
| 2. | $p \Rightarrow q$ | $e\wedge_1, 1$ |
| 3. | $q \Rightarrow p$ | $e\wedge_2, 1$ |
| 4. | p | P |
| 5. | q | $e\Rightarrow, 4, 2$ |
| 6. | q | P |
| 7. | p | $e\Rightarrow, 6, 3$ |
| 8. | $p \Leftrightarrow q$ | $i\Leftrightarrow, 4-5, 6-7$ |

6. $\vdash (p \wedge q) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p)$

Důkaz:

- | | | |
|----|--|---------------------|
| 1. | $p \wedge q$ | P |
| 2. | $p \Rightarrow q$ | P |
| 3. | $p \wedge q$ | it, 1 |
| 4. | p | $e\wedge_1, 3$ |
| 5. | $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ | $i\Rightarrow, 2-4$ |
| 6. | $(p \wedge q) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p)$ | $i\Rightarrow, 1-5$ |

7. $\vdash ((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

Důkaz:

- | | | |
|-----|---|------------------------------|
| 1. | $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p$ | P |
| 2. | p | P |
| 3. | $p \Rightarrow q$ | $e\Leftrightarrow_2, 1, 2$ |
| 4. | q | $e\Rightarrow, 2, 3$ |
| 5. | q | P |
| 6. | p | P |
| 7. | q | it, 5 |
| 8. | $p \Rightarrow q$ | $i\Rightarrow, 6-7$ |
| 9. | p | $e\Leftrightarrow_1, 8, 1$ |
| 10. | $p \Leftrightarrow q$ | $i\Leftrightarrow, 2-4, 5-9$ |
| 11. | $((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ | $i\Rightarrow, 1-10$ |

8. $((p \vee q) \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \vdash p \Leftrightarrow q$

Důkaz:

1.	$((p \vee q) \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow p$	P
2.	p	P
3.	$p \vee q$	$i\vee_{1,2}$
4.	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$	$e\Leftrightarrow_{2,1,2}$
5.	q	$e\Leftrightarrow_{1,3,4}$
6.	q	P
7.	q	P
8.	$p \vee q$	$i\vee_{2,7}$
9.	$p \vee q$	P
10.	q	P
11.	p	P
12.	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$	$e\Leftrightarrow_{2,1,11}$
13.	$p \vee q$	$i\vee_{1,11}$
14.	q	$e\Leftrightarrow_{1,13,12}$
15.	q	$e\vee_{9,11-14,10}$
16.	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$	$i\Leftrightarrow_{9-15,7-8}$
17.	p	$e\Leftrightarrow_{1,16,1}$
18.	$p \Leftrightarrow q$	$i\Leftrightarrow_{2-5,6-17}$

9. $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r) \vdash (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$

Důkaz:

1.	$p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$	P
2.	$p \wedge q$	P
3.	p	$e\wedge_{1,2}$
4.	q	$e\wedge_{2,2}$
5.	$q \Leftrightarrow r$	$e\Rightarrow_{3,1}$
6.	r	$e\Leftrightarrow_{1,4,5}$
7.	$p \wedge r$	$i\wedge_{3,6}$
8.	$p \wedge r$	P
9.	p	$e\wedge_{1,8}$
10.	r	$e\wedge_{2,8}$
11.	$q \Leftrightarrow r$	$e\Rightarrow_{9,1}$
12.	q	$e\Leftrightarrow_{2,11,10}$
13.	$p \wedge q$	$i\wedge_{9,12}$
14.	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$	$i\Leftrightarrow_{2-7,8-13}$

$$10. \vdash (p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

Důkaz:

1.	$p \vee (q \wedge r)$	P
2.	p	P
3.	$p \vee q$	$i\vee_{1,2}$
4.	$p \vee r$	$i\vee_{2,2}$
5.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$i\wedge, 3, 4$
6.	$q \wedge r$	P
7.	q	$e\wedge_{1,6}$
8.	r	$e\wedge_{2,6}$
9.	$p \vee q$	$i\vee_{2,7}$
10.	$p \vee r$	$i\vee_{2,8}$
11.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$i\wedge, 9, 10$
12.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$e\vee, 1, 2-5, 6-11$
13.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	P
14.	$p \vee q$	$e\wedge_{1,13}$
15.	$p \vee r$	$e\wedge_{2,13}$
16.	p	P
17.	$p \vee (q \wedge r)$	$i\vee_{1,16}$
18.	q	P
19.	p	P
20.	$p \vee (q \wedge r)$	$i\vee_{1,19}$
21.	r	P
22.	$q \wedge r$	$i\wedge, 18, 21$
23.	$p \vee (q \wedge r)$	$i\vee_{2,22}$
24.	$p \vee (q \wedge r)$	$e\vee, 15, 19-20, 21-23$
25.	$p \vee (q \wedge r)$	$e\vee, 14, 16-17, 18-24$
26.	$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	$i\Leftrightarrow, 1-12, 13-25$

5 Negace

5.1 Zavedení negace

1. $p \vdash \neg\neg p$

Důkaz:

1.	p	P
2.	$\neg p$	P
3.	\perp	$e\neg, 1, 2$
4.	$\neg\neg p$	$i\neg, 2-3$

2. $\neg p \vdash \neg(p \wedge q)$

Důkaz:

1.	$\neg p$	P
2.	$p \wedge q$	P
3.	p	$e\wedge, 1, 2$
4.	\perp	$e\neg, 3, 1$
5.	$\neg(p \wedge q)$	$i\neg, 2-4$

3. $p \Rightarrow \neg p \vdash \neg p$

Důkaz:

1.	$p \Rightarrow \neg p$	P
2.	p	P
3.	$\neg p$	$e\Rightarrow, 2, 1$
4.	\perp	$e\neg, 2, 3$
5.	$\neg p$	$i\neg, 2-4$

4. $\neg(p \Rightarrow q) \vdash \neg q$

Důkaz:

1.	$\neg(p \Rightarrow q)$	P
2.	q	P
3.	p	P
4.	q	$it, 2$
5.	$p \Rightarrow q$	$i\Rightarrow, 3-4$
6.	\perp	$e\neg, 5, 1$
7.	$\neg q$	$i\neg, 2-6$

5. $\neg(p \wedge q) \vdash p \Rightarrow \neg q$

Důkaz:

1.	$\neg(p \wedge q)$	P
2.	p	P
3.	q	P
4.	$p \wedge q$	$i\wedge, 2, 3$
5.	\perp	$e\neg, 4, 1$
6.	$\neg q$	$i\neg, 3-5$
7.	$p \Rightarrow \neg q$	$i\Rightarrow, 2-6$

6. $p \Rightarrow q \vdash \neg q \Rightarrow \neg p$

Důkaz:

1.	$p \Rightarrow q$	P
2.	$\neg q$	P
3.	p	P
4.	q	$e\Rightarrow, 3, 1$
5.	\perp	$e\neg, 4, 2$
6.	$\neg p$	$i\neg, 3-5$
7.	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$i\Rightarrow, 2-6$

$$7. \vdash \neg((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q))$$

Důkaz:

1.	$(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q)$	P
2.	$p \wedge \neg p$	P
3.	p	$e \wedge_1, 2$
4.	$\neg p$	$e \wedge_2, 2$
5.	\perp	$e \neg, 3, 4$
6.	$q \wedge \neg q$	P
7.	q	$e \wedge_1, 6$
8.	$\neg q$	$e \wedge_2, 6$
9.	\perp	$e \neg, 7, 8$
10.	\perp	$e \vee, 1, 2-5, 6-9$
11.	$\neg((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q)) \quad i \neg, 1-10$	

$$8. \neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$$

Důkaz:

1.	$\neg(p \vee q)$	P
2.	p	P
3.	$p \vee q$	$i \vee_1, 2$
4.	\perp	$e \neg, 3, 1$
5.	$\neg p$	$i \neg, 2-4$
6.	q	P
7.	$p \vee q$	$i \vee_2, 6$
8.	\perp	$e \neg, 7, 1$
9.	$\neg q$	$i \neg, 6-8$
10.	$\neg p \wedge \neg q \quad i \wedge, 5, 9$	

$$9. \neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$$

Důkaz:

1.	$\neg p \vee \neg q$	P
2.	$\neg p$	P
3.	$p \wedge q$	P
4.	p	$e \wedge_1, 3$
5.	\perp	$e \neg, 4, 2$
6.	$\neg(p \wedge q)$	$i \neg, 3-5$
7.	$\neg q$	P
8.	$p \wedge q$	P
9.	q	$e \wedge_2, 8$
10.	\perp	$e \neg, 9, 7$
11.	$\neg(p \wedge q)$	$i \neg, 8-10$
12.	$\neg(p \wedge q) \quad e \vee, 1, 2-6, 7-11$	

5.2 Ex falso quodlibet

$$1. \neg p \vdash p \Rightarrow q$$

Důkaz:

1.	$\neg p$	P
2.	p	P
3.	\perp	$e \neg, 2, 1$
4.	q	$e \perp, 3$
5.	$p \Rightarrow q \quad i \Rightarrow, 2-4$	

$$2. p \wedge \neg p \vdash q$$

Důkaz:

1. $p \wedge \neg p$ P
2. p $e\wedge_1, 1$
3. $\neg p$ $e\wedge_2, 1$
4. \perp $e\neg, 2, 3$
5. q $e\perp, 4$

$$3. p \vee q \vdash \neg p \Rightarrow q$$

Důkaz:

1. $p \vee q$ P
2.

p	P
-----	---
3.

$\neg p$	P
----------	---
4.

\perp	$e\neg, 2, 3$
---------	---------------
5.

q	$e\perp, 4$
-----	-------------
6. $\neg p \Rightarrow q$ $i\Rightarrow, 3-5$
7.

q	P
-----	---
8.

$\neg p$	P
----------	---
9.

q	$it, 7$
-----	---------
10. $\neg p \Rightarrow q$ $i\Rightarrow, 8-9$
11. $\neg p \Rightarrow q$ $e\vee, 1, 2-6, 7-10$

$$4. p \Rightarrow q, p \wedge \neg q \vdash r$$

Důkaz:

1. $p \Rightarrow q$ P
2. $p \wedge \neg q$ P
3. p $e\wedge_1, 2$
4. q $e\Rightarrow, 3, 1$
5. $\neg q$ $e\wedge_2, 2$
6. \perp $e\neg, 4, 5$
7. r $e\perp, 6$

$$5. p \vee q, p \Leftrightarrow q, \neg(p \wedge q) \vdash r$$

Důkaz:

1. $p \vee q$ P
2. $p \Leftrightarrow q$ P
3. $\neg(p \wedge q)$ P
4.

p	P
-----	---
5.

q	$e\Leftrightarrow_1, 4, 2$
-----	----------------------------
6.

$p \wedge q$	$i\wedge, 4, 5$
--------------	-----------------
7.

\perp	$e\neg, 6, 3$
---------	---------------
8.

q	P
-----	---
9.

p	$e\Leftrightarrow_2, 2, 8$
-----	----------------------------
10.

$p \wedge q$	$i\wedge, 9, 8$
--------------	-----------------
11.

\perp	$e\neg, 10, 3$
---------	----------------
12. \perp $e\vee, 1, 4-7, 8-11$
13. r $e\perp, 12$

5.3 Nepřímé důkazy

$$1. \neg\neg p \vdash p$$

Důkaz:

1. $\neg\neg p$ P
2. p $e\neg\neg, 1$

2. $\vdash p \vee \neg p$

Důkaz:

1.	$\neg(p \vee \neg p)$	P
2.	p	P
3.	$p \vee \neg p$	$i\vee_1, 2$
4.	\perp	$e\neg, 3, 1$
5.	$\neg p$	$i\neg, 2-4$
6.	$p \vee \neg p$	$i\vee_2, 5$
7.	\perp	$e\neg, 6, 1$
8.	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	$i\neg, 1-7$
9.	$p \vee \neg p$	$e\neg\neg, 8$

3. $\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$

Důkaz:

1.	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	P
2.	$\neg p$	P
3.	$\neg p \vee \neg q$	$i\vee_1, 2$
4.	\perp	$e\neg, 3, 1$
5.	$\neg\neg p$	$i\neg, 2-4$
6.	p	$e\neg\neg, 5$
7.	$\neg q$	P
8.	$\neg p \vee \neg q$	$i\vee_2, 7$
9.	\perp	$e\neg, 8, 1$
10.	$\neg\neg q$	$i\neg, 7-9$
11.	q	$e\neg\neg, 10$
12.	$p \wedge q$	$i\wedge, 6, 11$

Alternativní důkaz:

1.	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	P
2.	$\neg(p \wedge q)$	P
3.	p	P
4.	q	P
5.	$p \wedge q$	$i\wedge, 3, 4$
6.	\perp	$e\neg, 5, 2$
7.	$\neg q$	$i\neg, 4-6$
8.	$\neg p \vee \neg q$	$i\vee_2, 7$
9.	\perp	$e\neg, 8, 1$
10.	$\neg p$	$i\neg, 3-9$
11.	$\neg p \vee \neg q$	$i\vee_1, 10$
12.	\perp	$e\neg, 11, 1$
13.	$\neg\neg(p \wedge q)$	$i\neg, 2-12$
14.	$p \wedge q$	$e\neg\neg, 13$

$$4. \neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$$

Důkaz:

1.	$\neg(p \wedge q)$	P
2.	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	P
3.	$\neg p$	P
4.	$\neg p \vee \neg q$	$i\vee_1, 3$
5.	\perp	$e\vee, 4, 2$
6.	$\neg\neg p$	$i\neg, 3-5$
7.	p	$e\neg\neg, 6$
8.	$\neg q$	P
9.	$\neg p \vee \neg q$	$i\vee_2, 8$
10.	\perp	$e\vee, 9, 2$
11.	$\neg\neg q$	$i\neg, 8-10$
12.	q	$e\neg\neg, 11$
13.	$p \wedge q$	$i\wedge, 7, 12$
14.	\perp	$e\wedge, 13, 1$
15.	$\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$	$i\neg, 2-14$
16.	$\neg p \vee \neg q$	$e\neg\neg, 15$

5.4 Smíšené úlohy

$$1. \neg(p \Rightarrow q) \vdash p$$

Důkaz:

1.	$\neg(p \Rightarrow q)$	P
2.	$\neg p$	P
3.	p	P
4.	\perp	$e\neg, 3, 2$
5.	q	$e\perp, 4$
6.	$p \Rightarrow q$	$i\Rightarrow, 3-5$
7.	\perp	$e\Rightarrow, 6, 1$
8.	$\neg\neg p$	$i\neg, 2-7$
9.	p	$e\neg\neg, 8$

$$2. (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \vdash p$$

Důkaz:

1.	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$	P
2.	$\neg p$	P
3.	p	P
4.	\perp	$e\neg, 3, 2$
5.	q	$e\perp, 4$
6.	$p \Rightarrow q$	$i\Rightarrow, 3-5$
7.	p	$e\Rightarrow, 6, 1$
8.	\perp	$e\Rightarrow, 7, 2$
9.	$\neg\neg p$	$i\neg, 2-8$
10.	p	$e\neg\neg, 9$

3. $p \Leftrightarrow \neg\neg q \vdash p \Leftrightarrow q$

Důkaz:

1. $p \Leftrightarrow \neg\neg q$ P
2.

p	P
-----	---
3. $\neg\neg q$ $e_{\Leftrightarrow 1, 2, 1}$
4.

q	$e_{\neg\neg, 3}$
-----	-------------------
5.

q	P
-----	---
6.

$\neg q$	P
----------	---
7. q $it, 5$
8. \perp $e_{\neg, 7, 6}$
9. $\neg\neg q$ $i_{\neg, 6-8}$
10.

p	$e_{\Leftrightarrow 2, 1, 9}$
-----	-------------------------------
11. $p \Leftrightarrow q$ $i_{\Leftrightarrow, 2-4, 5-10}$

4. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q \vdash \neg q \Rightarrow p$

Důkaz:

1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ P
2.

$\neg q$	P
----------	---
3.

$\neg p$	P
----------	---
4.

p	P
-----	---
5. $\neg p$ $it, 3$
6. \perp $e_{\neg, 4, 5}$
7. q $e_{\perp, 6}$
8. $p \Rightarrow q$ $i_{\Rightarrow, 4-7}$
9. q $e_{\Rightarrow, 8, 1}$
10.

\perp	$e_{\neg, 9, 2}$
---------	------------------
11. $\neg\neg p$ $i_{\neg, 3-10}$
12. p $e_{\neg\neg, 11}$
13. $\neg q \Rightarrow p$ $i_{\Rightarrow, 2-12}$

5. $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$

Důkaz:

1. $\neg p \wedge \neg q$ P
2. $\neg p$ $e_{\wedge 1, 1}$
3. $\neg q$ $e_{\wedge 2, 1}$
4.

$p \vee q$	P
------------	---
5.

p	P
-----	---
6. $\neg p$ $it, 2$
7. \perp $e_{\neg, 5, 6}$
8.

q	P
-----	---
9. $\neg q$ $it, 3$
10.

\perp	$e_{\neg, 8, 9}$
---------	------------------
11. \perp $e_{\vee, 4, 5-7, 8-10}$
12. $\neg(p \vee q)$ $i_{\neg, 4-11}$

6. $\vdash p \vee (p \Rightarrow q)$

Důkaz:

1. $p \vee \neg p$ LEM
2.

p	P
-----	---
3.

$p \vee (p \Rightarrow q)$	$i_{\vee 1, 2}$
----------------------------	-----------------
4.

$\neg p$	P
----------	---
5.

p	P
-----	---
6. \perp $e_{\neg, 5, 4}$
7. q $e_{\perp, 6}$
8. $p \Rightarrow q$ $i_{\Rightarrow, 5-7}$
9.

$p \vee (p \Rightarrow q)$	$i_{\vee 2, 8}$
----------------------------	-----------------
10. $p \vee (p \Rightarrow q)$ $e_{\vee, 1, 2-3, 4-9}$

7. $\vdash (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$

Důkaz:

1.	$q \vee \neg q$	LEM
2.	q	P
3.	p	P
4.	q	it, 2
5.	$p \Rightarrow q$	$i \Rightarrow, 3-4$
6.	$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$	$i \vee_1, 5$
7.	$\neg q$	P
8.	q	P
9.	\perp	$e \neg, 8, 7$
10.	r	$e \perp, 9$
11.	$q \Rightarrow r$	$i \Rightarrow, 8-10$
12.	$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$	$i \vee_2, 11$
13.	$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$	$e \vee, 1, 2-6, 7-12$

8. $\neg p \Rightarrow q, r \vee \neg q, p \Rightarrow (q_1 \vee q_2), \neg r \wedge \neg q_2 \vdash q_1$

1.	$\neg p \Rightarrow q$	P	
2.	$r \vee \neg q$	P	
3.	$p \Rightarrow (q_1 \vee q_2)$	P	
4.	$\neg r \wedge \neg q_2$	P	
5.	$q_1 \vee \neg q_1$	LEM	
6.	q_1	P	
7.	$\neg q_1$	P	
8.	$\neg q_1$	P	
9.	p	P	
10.	$q_1 \vee q_2$	$e\Rightarrow, 9, 3$	
11.	q_1	P	
12.	q_2	P	
13.	$\neg q_2$	$e\wedge_2, 4$	
14.	\perp	$e\neg, 12, 13$	
15.	q_1	$e\perp, 14$	
16.	q_1	$e\vee, 10, 11-11, 12-15$	
17.	\perp	$e\neg, 16, 8$	
18.	$\neg p$	$i\neg, 9-17$	
19.	q	$e\Rightarrow, 18, 1$	
20.	$\neg q$	P	
21.	\perp	$e\neg, 19, 20$	
22.	r	P	
23.	$\neg r$	$e\wedge_1, 4$	
24.	\perp	$e\neg, 22, 23$	
25.	\perp	$e\vee, 2, 22-24, 20-21$	
26.	q_1	$e\perp, 25$	
27.	$\neg q_1 \Rightarrow q_1$	$i\Rightarrow, 8-26$	
28.	q_1	$e\Rightarrow, 7, 27$	
29.	q_1	$e\vee, 5, 6-6, 7-28$	

Alternativní důkaz:

1.	$\neg p \Rightarrow q$	P
2.	$r \vee \neg q$	P
3.	$p \Rightarrow (q_1 \vee q_2)$	P
4.	$\neg r \wedge \neg q_2$	P
5.	$\neg r$	$e \wedge_{1, 4}$
6.	$\neg q_2$	$e \wedge_{2, 4}$
7.	$\neg q_1$	P
8.	p	P
9.	$q_1 \vee q_2$	$e \Rightarrow, 8, 3$
10.	q_1	P
11.	\perp	$e \neg, 10, 7$
12.	q_2	P
13.	\perp	$e \neg, 12, 6$
14.	\perp	$e \vee, 9, 10-11, 12-13$
15.	$\neg p$	$i \neg, 8-14$
16.	q	$e \Rightarrow, 15, 1$
17.	r	P
18.	\perp	$e \neg, 17, 5$
19.	$\neg q$	P
20.	\perp	$e \neg, 16, 19$
21.	\perp	$e \vee, 2, 17-18, 19-20$
22.	$\neg \neg q_1$	$i \neg, 7-21$
23.	q_1	$e \neg \neg, 22$

9. $p \Rightarrow (q \vee r) \vdash (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

Důkaz:

1.	$p \Rightarrow (q \vee r)$	P
2.	$p \vee \neg p$	LEM
3.	p	P
4.	$q \vee r$	$e\Rightarrow, 3, 1$
5.	q	P
6.	p	P
7.	q	it, 5
8.	$p \Rightarrow q$	$i\Rightarrow, 6-7$
9.	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$	$i\vee_1, 8$
10.	r	P
11.	p	P
12.	r	it, 10
13.	$p \Rightarrow r$	$i\Rightarrow, 11-12$
14.	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$	$i\vee_2, 13$
15.	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$	$e\vee, 4, 5-9, 10-14$
16.	$\neg p$	P
17.	p	P
18.	\perp	$e\neg, 17, 16$
19.	q	$e\perp, 18$
20.	$p \Rightarrow q$	$i\Rightarrow, 17-19$
21.	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$	$i\vee_1, 20$
22.	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$	$e\vee, 2, 3-15, 16-21$

10. $\vdash \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Důkaz:

1.	$\neg(p \wedge q)$	P
2.	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	P
3.	$\neg p$	P
4.	$\neg p \vee \neg q$	$i\vee_1, 3$
5.	\perp	$e\neg, 4, 2$
6.	$\neg\neg p$	$i\neg, 3-5$
7.	p	$e\neg\neg, 6$
8.	$\neg q$	P
9.	$\neg p \vee \neg q$	$i\vee_2, 8$
10.	\perp	$e\neg, 9, 2$
11.	$\neg\neg q$	$i\neg, 8-10$
12.	q	$e\neg\neg, 11$
13.	$p \wedge q$	$i\wedge, 7, 12$
14.	\perp	$e\neg, 13, 1$
15.	$\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$	$i\neg, 2-14$
16.	$\neg p \vee \neg q$	$e\neg\neg, 15$
17.	$\neg p \vee \neg q$	P
18.	$p \wedge q$	P
19.	p	$e\wedge_1, 18$
20.	q	$e\wedge_2, 18$
21.	$\neg p$	P
22.	\perp	$e\neg, 19, 21$
23.	$\neg q$	P
24.	\perp	$e\neg, 20, 23$
25.	\perp	$e\vee, 17, 21-22, 23-24$
26.	$\neg(p \wedge q)$	$i\neg, 18-25$
27.	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$	$i\Leftrightarrow, 1-16, 17-26$

Reference

[1] Alastair Carr, The Natural Deduction Pack, *dostupné online*