Optimalizace

Konvexní množiny a polyedry

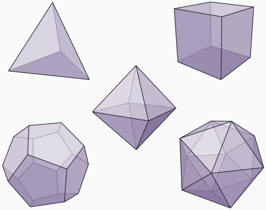
Tomáš Kroupa   Tomáš Werner

2024

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

Množina přípustných řešení v úloze lineárního programování

$$\begin{aligned} \text{Minimalizuj} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

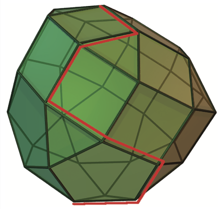


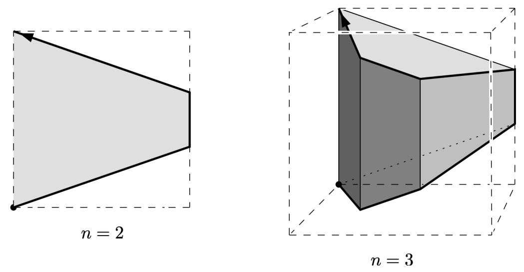
Name	Image	Vertices V	Edges E	Faces F	Euler characteristic: $V - E + F$
Tetrahedron		4	6	4	**2**
Hexahedron or cube		8	12	6	**2**
Octahedron		6	12	8	**2**
Dodecahedron		20	30	12	**2**
Icosahedron		12	30	20	**2**

Wikipedia

Jak nalézt řešení úlohy LP?

- Pokud minimum existuje, nachází se v jednom z konečně mnoha *vrcholů* polyedru přípustných řešení
- *Simplexová metoda* prochází vrcholy s ohledem na optimalizaci lineárního kritéria





J. De Loera - Algebraic and Topological Tools in Linear Optimization

J. Matoušek, B. Gärtner - Understanding and using linear programming

Konvexní množiny

Definice

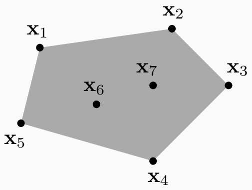
Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ a každé $\alpha \in [0, 1]$ platí $(1 - \alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \in X$.

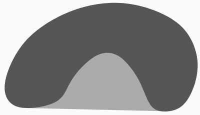
- Konvexní kombinace bodů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ je lineární kombinace $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$ a $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$
- Množina je konvexní právě tehdy, když je uzavřena na konvexní kombinace
- Konvexní obal bodů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ je množina

$$\operatorname{conv}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\}$$

Operace s konvexními množinami

- *Průnik* libovolně mnoha konvexních množin je konvexní
- *Konvexní obal* libovolné množiny vektorů je průnik všech konvexních množin, které tu množinu obsahují
- *Posunutí* konvexní množiny o pevný vektor je konvexní





Sjednocení dvou konvexních množin nemusí být konvexní!

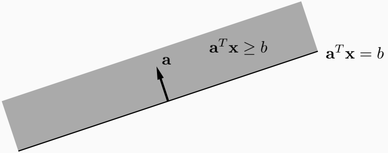
Konvexní polyedry

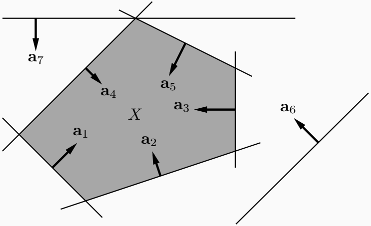
Definice

- Uzavřený poloprostor je množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq b\}$
- Konvexní polyedr je průnik konečně mnoha poloprostorů, tj.

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$$

Dimenze konvexního polyedru je dimenze jeho afinního obalu.





Příklady konvexních polyedrů

- Nadrovina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = b\}$, kde $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$
- Afinní podprostor $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$
- Hyperkrychle $[-1, 1]^n$
- Standardní simplex $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\right\}$
- Platónská tělesa

Extremální body

Definice

Nechť X je konvexní množina. Bod $\mathbf{x} \in X$ je extremální, pokud

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, \;\; \mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2.$$

- Extremálních bodů může být nekonečně mnoho
- Ovšem ukážeme, že polyedr má konečně mnoho extremálních bodů a ty lze získat řešením soustavy lineárních rovnic
- Konvexní množina nemusí mít extremální bod

Extremální body polyedru

- $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- Pro neprázdnou množinu řádkových indexů $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ uvažujeme matici $\mathbf{A}_I$ a vektor $\mathbf{b}_I$

Věta

Nechť $\mathbf{x} \in X$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Bod $\mathbf{x}$ je extremální.
2. Existuje neprázdná $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ tak, že platí $\mathbf{A}_I\mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ a matice $\mathbf{A}_I$ má lineárně nezávislé sloupce.

Jak procházet extremální body polyedru?

Na základě předchozí věty se nabízí tento přímočarý postup:

Algoritmus

- Vygeneruj neprázdnou množinu $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$
- Vyřeš soustavu $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$
- Existuje-li jediné řešení $\mathbf{x}$ a $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$, pak je $\mathbf{x}$ extremální bod

Problém

Počet extremálních bodů některých polyedrů je exponenciální v m.

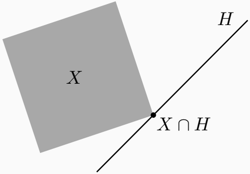
Konvexní množina se opírá o nadrovinu

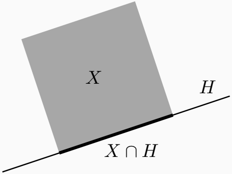
Definice

Opěrná nadrovina konvexní množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je nadrovina

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = b\}$$

taková, že $X \cap H \neq \emptyset$ a platí $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq b$ pro všechna $\mathbf{x} \in X$.





Stěny polyedru

Definice

Stěna polyedru X je množina $X \cap H$, kde H je nějaká opěrná nadrovina polyedru X.

Podle dimenze rozlišujeme tyto stěny:

- Vrchol (0)
- Hrana (1)
- Faseta ($\dim X - 1$)

Bod $\mathbf{x} \in X$ je vrchol, právě když je to extremální bod.

Které polyedry mají vrchol?

Věta

Nechť $X \neq \emptyset$ je konvexní polyedr. Tato tvrzení jsou ekvivalentní.

1. Polyedr X má alespoň jeden vrchol.
2. Polyedr X neobsahuje přímku.

Příklady

- omezený konvexní polyedr
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

Kde nabývá lineární funkce na polyedru minima?

Věta

Nechť konvexní polyedr X neobsahuje přímku a lineární funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ má na X minimum. Potom nabývá f minima v nějakém vrcholu polyedru X.

- Označme $\mathbf{x}^* \in X$ bod minima
- Pak $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^*\}$ je opěrná nadrovina polyedru X v bodě $\mathbf{x}^*$
- Tudíž f nabývá minima na celé stěně $X \cap H$
- $X \cap H$ neobsahuje přímku, tedy má vrchol

Co z toho plyne pro řešení úlohy LP?

Úlohu LP

$$\min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}}_{X}\}$$

nyní umíme vyřešit, pokud

- polyedr X neobsahuje přímku
- funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ má na X minimum
- umíme *efektivně* procházet vrcholy polyedru X

Simplexová metoda řeší úlohu LP v plné obecnosti.