Optimalizace

Reálné funkce a zobrazení, lokální extrémy

Tomáš Kroupa, Mirko Navara

21. 4. 2024

FEL ČVUT

Slovník pojmů (co zde bude)

Relace, zobrazení, funkce

Graf funkce

Vrstevnice funkce

Limita zobrazení (vektorové funkce)

Spojité zobrazení

Derivace funkce, diferencovatelná funkce, diferenciál

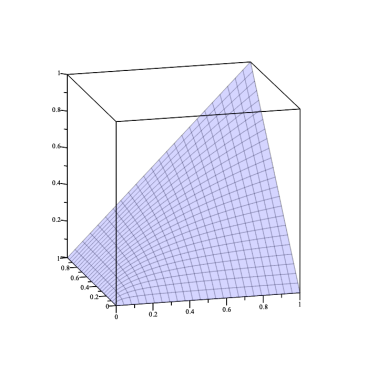
Parciální derivace funkce, gradient

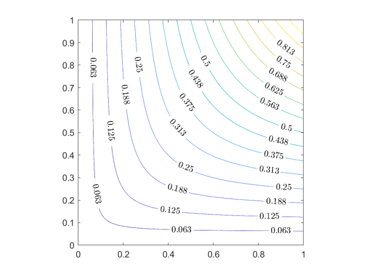
Derivace zobrazení (Jacobiho matice), jacobián, totální diferenciál

Směrová derivace zobrazení

- Graf funkce f: $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.
- Vrstevnice funkce f výšky y: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = y\}$.

Příklad: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y-xy}\,, \qquad (x,y) \in (0,1]^2\,.$

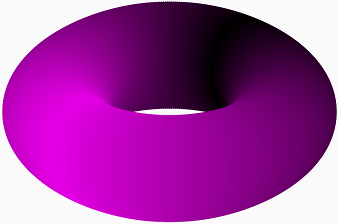




Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Příklady

- Afinní zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- Skalární pole $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, vektorové pole $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
- Parametrizace toru $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
  $\mathbf{f}(u, v) = \big((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v\big)$



Limita zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{z}$$

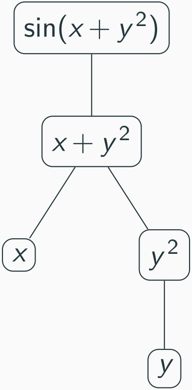
znamená konvergenci v normě,

$$\lim_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|\to 0} \|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{z}\| = 0\,.$$

Na volbě normy nezáleží. ☺

Spojitost zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

- Definice: $\lim\limits_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.
- Spojitost se zachovává skládáním funkcí, což vede na prakticky použitelnou postačující podmínku



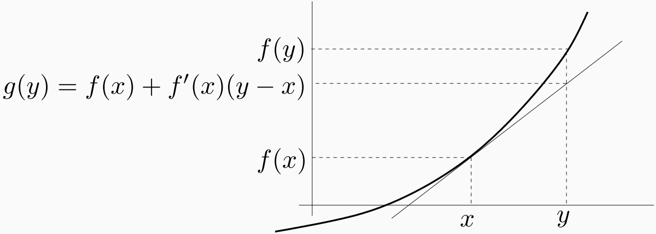
Derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Pokud existuje

$$a = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\,, \quad \text{t.j.} \quad \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - a\,(y - x)}{y - x} = 0\,,$$

pak a se nazývá derivace funkce f v bodě x, píšeme $f'(x) \coloneqq a$ a říkáme, že funkce f je v bodě x diferencovatelná nebo že tam má diferenciál, kterým je lineární zobrazení

$$y \mapsto a\,(y - x)\,.$$



Parciální derivace funkce f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Pokud existuje

$$\lim_{y\to x_i} \frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_n)}{y - x_i} =$$
$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+\alpha,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_n)}{\alpha},$$

pak se nazývá parciální derivace funkce f v bodě x podle i-té proměnné (x_i).

Vektor parciálních derivací podle všech proměnných se nazývá gradient.

Intermezzo: Značení derivací

značení	Lagrangeovo	Leibnizovo	operátorové
Derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
derivace	f'	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	$\mathrm{D}f$
hodnota v x	$f'(x)$	$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$	$\mathrm{D}f(x)$
hodnota v 1	$f'(1)$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big\vert_{x=1}$	$\mathrm{D}f(1)$
Parciální derivace funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podle i-té proměnné			
derivace	f_{x_i}	$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	$\mathrm{D}_i f$
hodnota v $\mathbf{x}$	$f_{x_i}(\mathbf{x})$	$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$	$\mathrm{D}_i f(\mathbf{x})$
hodnota v $\mathbf{1}$	$f_{x_i}(\mathbf{1})$	$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{1}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\Big\vert_{\mathbf{x}=\mathbf{1}}$	$\mathrm{D}_i f(\mathbf{1})$
Parciální derivace funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podle všech proměnných			
derivace	f'	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{x}}$	$\nabla f^{\top}$
hodnota v $\mathbf{x}$	$f'(\mathbf{x})$	$\frac{\mathrm{d}f(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{x}}(\mathbf{x})$	$\nabla f(\mathbf{x})^{\top}$
hodnota v $\mathbf{1}$	$f'(\mathbf{1})$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{x}}(\mathbf{1}) = \frac{\mathrm{d}f(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\Big\vert_{\mathbf{x}=\mathbf{1}}$	$\nabla f(\mathbf{1})^{\top}$

Derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definice

Pokud existuje matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ taková, že

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|} = \mathbf{0}\,,$$

tj.

$$\lim_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|\to 0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|} = 0\,,$$

pak $\mathbf{A}$ se nazývá derivace nebo Jacobiho matice zobrazení $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$, píšeme $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) := \mathbf{A}$ a říkáme, že zobrazení $\mathbf{f}$ je v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelné nebo že tam má totální diferenciál, kterým je lineární zobrazení

$$\mathbf{y} \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,.$$

Je-li Jacobiho matice čtvercová ($m = n$), pak její determinant, $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{f}'(\mathbf{x})$, se nazývá jacobián.

Existence derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Existuje-li derivace zobrazení $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, platí

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 f_1(\mathbf{x}) & \ldots & \mathrm{D}_n f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{D}_1 f_m(\mathbf{x}) & \ldots & \mathrm{D}_n f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Věta

Jestliže v bodě $\mathbf{x}$ všechny parciální derivace $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \mathrm{D}_j f_i$ existují a jsou spojité, potom má $\mathbf{f}$ v $\mathbf{x}$ derivaci (totální diferenciál).

Speciální případy

$\mathbf{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{g}'(x) = \begin{bmatrix} g_1'(x) \\ \vdots \\ g_m'(x) \end{bmatrix}.$$

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \nabla f(\mathbf{x})^\mathsf{T},$$

kde

$$\nabla f(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 f(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathrm{D}_n f(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = f'(\mathbf{x})^\mathsf{T}$$

je gradient funkce f v bodě $\mathbf{x}$.

Řetízkové pravidlo

Věta o derivaci složeného zobrazení

Pro diferencovatelná zobrazení

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathbf{f}"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{h}:=\mathbf{g}\circ\mathbf{f}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\mathbf{g}"] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

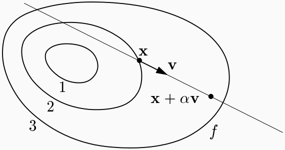
platí

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big)\,\mathbf{f}'(\mathbf{x}).$$

Směrová derivace

Směrová derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ve směru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je vektor

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\alpha} \in \mathbb{R}^m .$$



Tvrzení

Je-li zobrazení $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelné, pak jeho směrová derivace v bodě $\mathbf{x}$ ve směru $\mathbf{v}$ je rovna $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\,\mathbf{v}$.

Speciální případ: funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Tvrzení

Je-li funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelná, pak její směrová derivace v bodě $\mathbf{x}$ ve směru $\mathbf{v}$ je rovna skalárnímu součinu $\nabla f(\mathbf{x})^\mathsf{T}\,\mathbf{v} = f'(\mathbf{x})\,\mathbf{v}$ a je pro jednotkový vektor $\mathbf{v}$

- maximální, je-li $\mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$;
- nulová, je-li $\mathbf{v} \perp \nabla f(\mathbf{x})$.

Reference

- T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 8). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 17. 10. 2022. https://cw.fel.cvut.cz/wiki/_media/courses/b0b33opt/opt.pdf
- J. Hamhalter a J. Tišer. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. FEL ČVUT, 2005. https://math.fel.cvut.cz/en/people/tiser/dipocet.pdf
- *Matlab Activities for Multivariable Calculus.* https://mse.redwoods.edu/darnold/math50c/matlab/
- M. Navara. *Matematika spojitého světa*. Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2011. https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/MSS/MSS_print.pdf