

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. (2 b) Najděte vzdálenost bodu  $\mathbf{z} = (2, -1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$  od nadroviny  $\{\mathbf{x}; \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$ , kde  $\mathbf{a} = (3, 1, 0, 2)$ ,  $b = 2$ .

Můžeme využít např. známého vzorce  $\frac{|\mathbf{a}^T \mathbf{z} - b|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{|(3,1,0,2)(2,-1,0,0) - 2|}{\|(3,1,0,2)\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}$ .

3. Máme 5 pozorování  $(0, 1), (1, 1), (\sqrt{2}, 3), (\sqrt{3}, 3), (2, 4)$  tvaru  $(x_i, y_i)$ . Hledáme regresní funkci  $y = \theta_1 x^2 + \theta_2$ , kde  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$  jsou neznámé parametry.

- a) (1 bod) Formulujte úlohu maticově jako problém nejmenších čtverců.  
b) (2 body) Vyřešte tento problém.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Hledáme  $\theta \in \mathbb{R}^2$  minimalizující  $\|\mathbf{A}\theta - \mathbf{b}\|^2$ . To je to samé, jako řešit soustavu normálních rovnic  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \theta = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ , což je soustava

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix},$$

jejíž jediné řešení je  $\theta_1 = \theta_2 = \frac{4}{5}$ .

4. Řádky matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1000 \times 9}$  reprezentují filmy a sloupce diváky, složky matice  $\mathbf{A}$  jsou čísla 0 nebo 1 podle toho, zda daný divák shlédl daný film.

- a) (1 b) Jakou interpretaci mají složky matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ?  
b) (1 b) Jakou interpretaci mají složky matice  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ ?  
c) (1.5 b) Pro matici  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  hledáme nejbližší matici hodnosti  $\leq 4$ . Formulujte úlohu maticově jako optimalizační problém a napište (obecně) hodnotu účelové funkce v optimu.  
d) (1.5 b) Jaké bude optimální řešení tohoto problému, pokud víte, že matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  má alespoň 5 nulových vlastních čísel?  
a) Počet filmů, které viděl divák  $i$  a  $j$ . b) Počet diváků, kteří viděli filmy  $i$  a  $j$ . c) Minimalizujeme  $\|\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2$  za podmínek  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$  a  $\text{rank } \mathbf{B} \leq 4$ . V optimu pro matici  $\mathbf{B}^*$  platí

$$\|\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{B}^*\|^2 = s_5^2 + \dots + s_9^2 = \lambda_5^2 + \dots + \lambda_9^2$$

kde  $s_1 \geq \dots \geq s_9$  jsou singulární čísla matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , která se rovnají vlastním číslům  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_9$  matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , protože spektrální rozklad pozitivně semidefinitní matice je i jejím singulárním rozkladem. d)  $\mathbf{B}^* = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.

**ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.**

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

000



	1
a	
b	
c	
d	
e	

**ODPOVĚĎ (a) JE VŽDY SPRÁVNÁ.**

- Nechť  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  je matice taková, že  $\text{rank } \mathbf{A} = n < m$ . Matice  $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ 
  - je singulární
  - je regulární
  - je ortogonální
  - je negativně definitní

II (e) nemusí existovat
- Máme zadánu pozitivně definitní symetrickou matici  $\mathbf{A}$  řádu  $n$ . Platí:
  - $\min\{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} = \lambda$ , kde  $\lambda$  je nejmenší vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$ .
  - Nic z uvedeného.
  - Optimální řešení úlohy  $\max\{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$  vždy existuje.
  - Kvadratická forma  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  může nabývat záporných hodnot.
  - Každý vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu matice  $\mathbf{A}$  je řešením úlohy  $\max\{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ .
- Máme ortogonální matice  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Označme  $\mathbf{y} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k \mathbf{x}$ . Platí:
  - $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ .
  - Vektor  $\mathbf{y}$  je nulový.
  - Vektory  $\mathbf{y}$  a  $\mathbf{x}$  jsou kolmé.
  - $\|\mathbf{y}\| = 1$ .

II (e) Neplatí žádné výše uvedené tvrzení.
- Nechť  $n \geq 2$  a  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  je jednotkový vektor. Ortogonální projektor na podprostor  $\text{span}\{\mathbf{a}\}$ 
  - je matice  $\mathbf{a} \mathbf{a}^T$
  - neexistuje
  - je matice plné hodnosti
  - je symetrická regulární matice

II (e) je matice s alespoň jedním nereálným vlastním číslem
- Pro úlohu nejmenších čtverců  $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}\|^2$ , kde  $\mathbf{A}$  má lineárně nezávislé sloupce, platí:
  - Optimální řešení je  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}$ .
  - Optimálních řešení může být nekonečně mnoho.
  - Hodnota v optimu je vždy 0.
  - Úloha nemusí mít optimální řešení.
  - Nic z uvedeného.