Vyhledávání

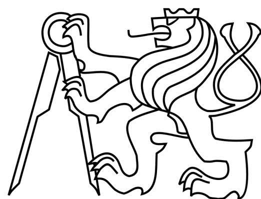
Karel Richta a kol.

Katedra počítačů
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

© Karel Richta, Jan Drchal a kol., 2024

Datové struktury a algoritmy, B6B36DSA
02/2024, Lekce 10

https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b6b36dsa/start



Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Vyhledávání (Searching)

***Definice*:**

- Vstup: množina *n* záznamů obsahujících klíče a hledaný klíč *k*
- Výstup: Záznamy s klíčem *k* nebo informace, že žádný takový neexistuje

***Implementace*:**

- Implementace pomocí pole:
  - Sekvenční vyhledávání
  - Binární vyhledávání
- Binární vyhledávací stromy (BVS, nebo BST – Binary Search Trees):
  - Reprezentace uzlů a hran
  - Operace nad BVS
  - Vyvažování BVS

Typické operace při vyhledávání

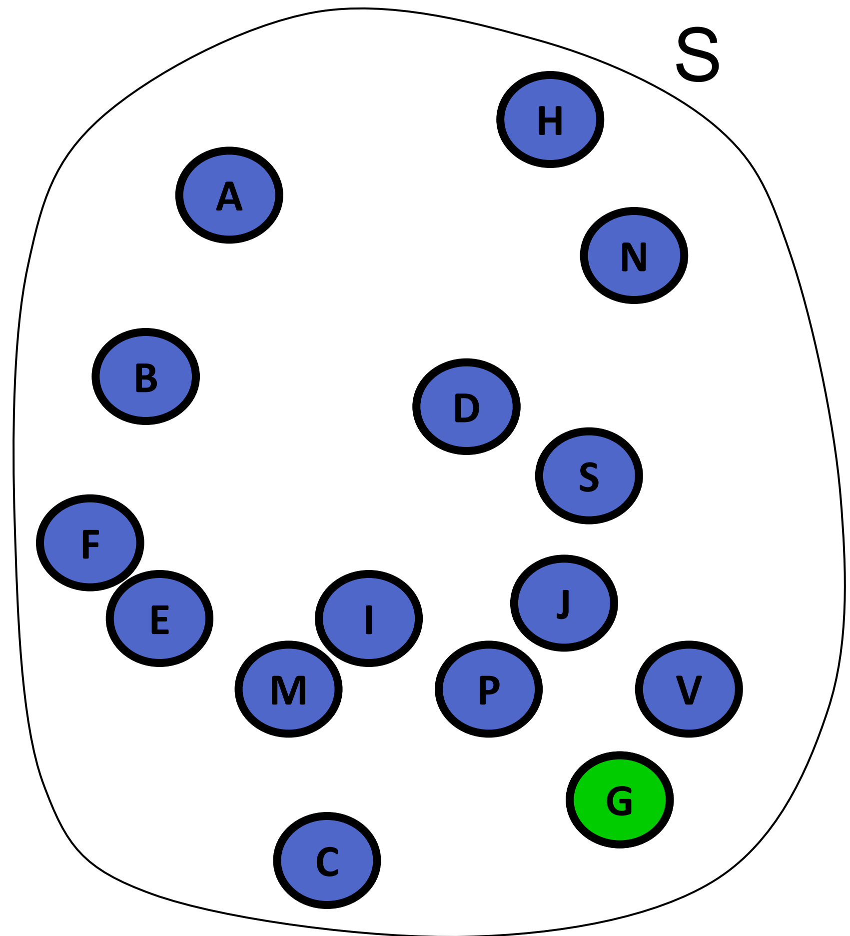
- Připomeňme si operace související s vyhledáváním:
  - vložení záznamu s klíčem
  - odstranění záznamu s klíčem
  - vyhledání záznamu podle klíče
  - minimum a maximum
  - předchůdce a následník
  - a další …

Vyhledávání

Vstup: (multi)množina *n* klíčů a hledaný klíč *k*

Popis problému: Kde je *k?*

G?



- Hledání G v S bylo úspěšné

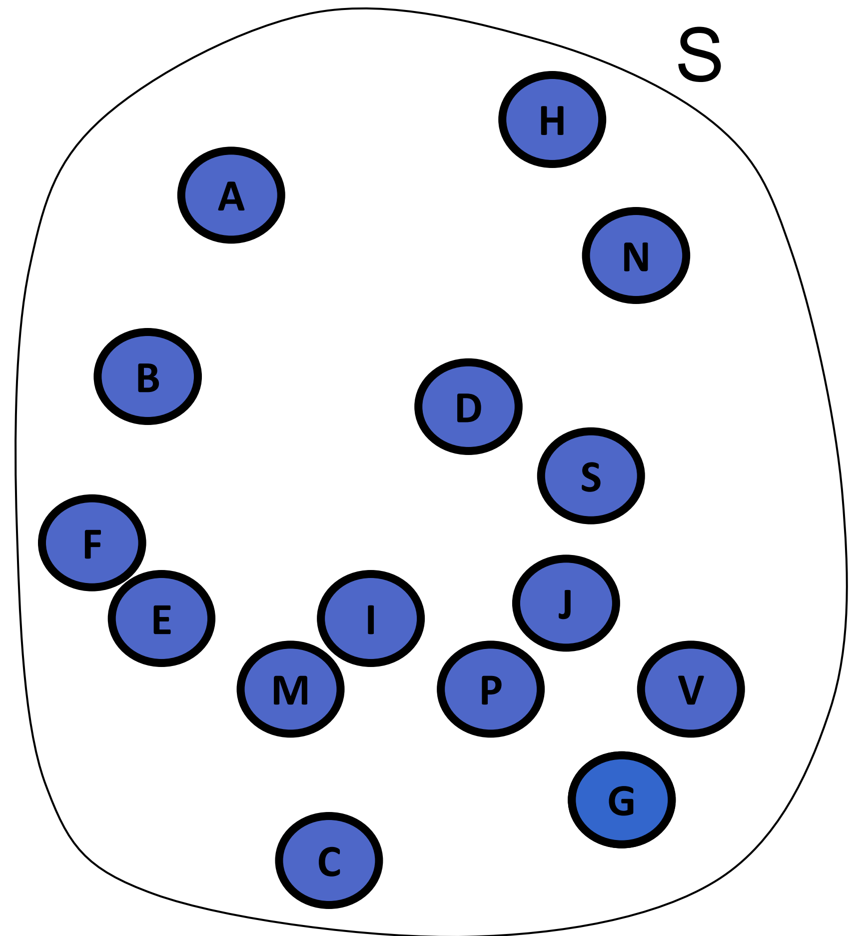
Vyhledávání

Vstup: (multi)množina *n* klíčů a hledaný klíč *k*

Popis problému: Kde je *k?*

L?

- Hledání L v S nebylo úspěšné



Prostor pro vyhledávání

Prohledávaný prostor S (search space)

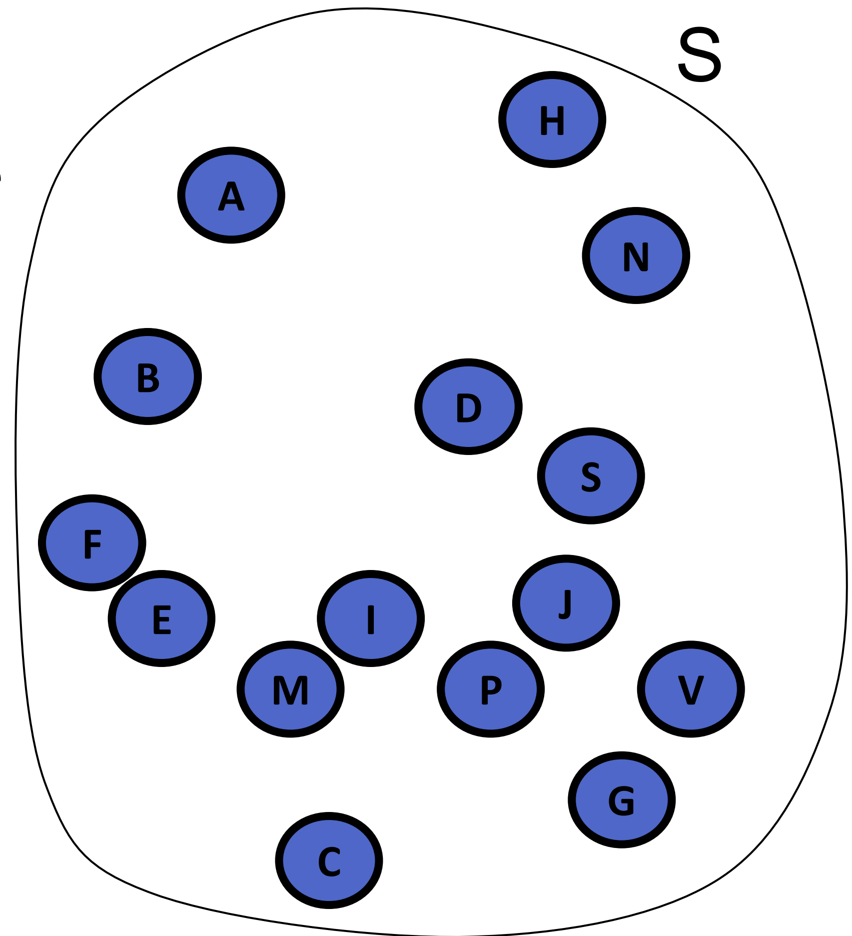
= (multi)množina klíčů, ve které hledáme

- přesněji: množina záznamů, ve které hledáme podle klíče
- unikátní klíče
- tabulka, soubor, …

Universum U pro vyhledávací prostor

= množina všech možných klíčů

$S \subset U$



Taxonomie pro vyhledávání

Prohledávaný prostor

– **Statický** - prohledávaný prostor je fixní
  -> jednodušší implementace
  -> změna znamená novou verzi
  -> příklad: telefonní seznam, tištěný adresář
– **Dynamický** - prohledávaný prostor se může měnit v čase
  -> složitější implementace
  -> změny se provádějí pomocí opearcí:
  `insert,delete,replace`
  -> příklad: tabulka symbolů v kompilátoru

Vyhledávací operace

Symboly:

- `k … klíč (key)`
- `e … element s klíčem k (element with key k)`
- `s … prohledávaná sada (data set)`

Operace (informativní seznam):

- Selektory:
  - `search(k,s)`
  - `min(s), max(s)`
  - `pred(e,s), succ(e,s)`

  } extenze

- Modifikátory:
  - `insert(e,s), delete(e,s), replace(e,s)`

klíč nahrazovaného elementu je součástí nového elementu **e**

Jiná klasifikace

Adresní vyhledávání

- Adresní vyhledávání - založeno na vlastnostech klíčů
  - výpočet pozice z klíče pos = f(k)
  - přímý přístup (direct access), hašování
  - pole, tabulka, …
  - přímý přístup => rychlé … O(1)

Asociativní vyhledávání

- Asociativní vyhledávání - založeno na porovnání elementů
  - elementy jsou umístěny podle vztahu k ostatním
  - sekvenční hledání, binární hledání, vyhledávací stromy
  - vyžaduje hledání => pomalejší … O(log n) až O(n)

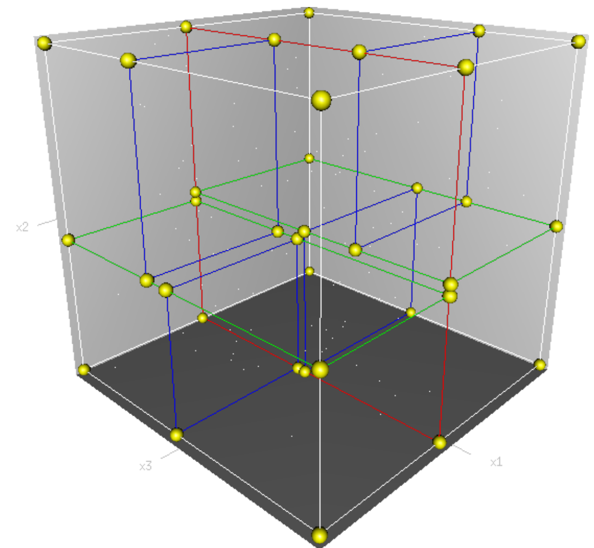
Ještě jiné klasifikace

Interní nebo externí

- Interní nebo externí
  - Interní – v paměti
  - Externí – na disku (příp. pásce)

Dimenze klíčů

- Dimenze klíčů
  - Jedno-dimenzionální - k
  - Multi-dimenzionální - [x,y,z]



Měření kvality (Quality measures)

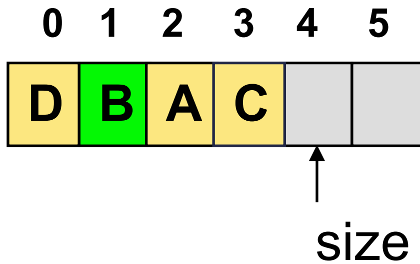
Prostor pro data

- **P(n)** = paměťová složitost (memory complexity)

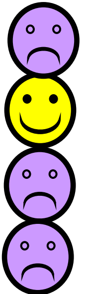
Časová náročnost

- **Q(n)**= časová složitost `search, query`
- **I(n)** = časová složitost `insert`
- **D(n)**= časová složitost `delete`

Sekvenční vyhledávání v neseřazeném poli



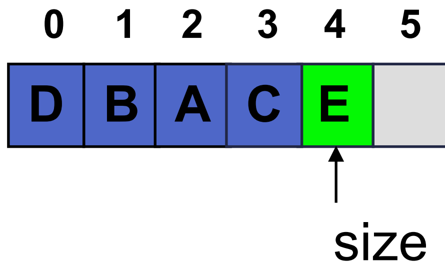
- **Neseřazené pole** P(n) = O(n)
- sekvenční hledání Q(n) = O(n)
- insert I(n) = O(1)
- delete D(n) = O(n)
- min, max in O(n)



```
nodeT seqSearch( key k, nodeT a[] ) {
      int i = 0;
      while( (i < a.size) && (a[i].key != k) )
            i++;
      if( i < a.size ) return a[i];
      else return NODE_NOT_FOUND;
}
```

Java-like pseudo code

Vylepšené vyhledávání v neseřazeném poli



Neseřazené pole se zarážkou (sentinel)

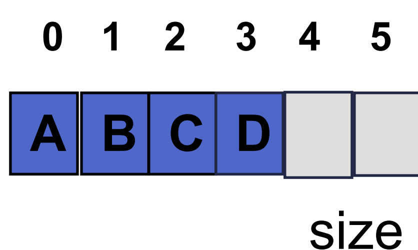
Sekvenční hledání je stále Q(n) = O(n)

```
search("E", a)
```

```
nodeT seqSearchWithSentinel( key k, nodeT a[] ) {
      int i = 0;
      a[a.size] = createArrayElement(k); // add sentinel
      while( a[i].key != k ) // save one test per step
            i++;
      if( i < a.size ) return a[i];
      else return NODE_NOT_FOUND;
}
```

Java-like pseudo code

Binární hledání v seřazeném poli



Seřazené pole	P(n)	= O(n)	
Binární hledání	Q(n)	= O(log(n))	
insert	I (n)	= O(n)	
delete	D(n)	= O(n)	
min, max		O(1)	

```
nodeT binarySearch( key k, nodeT sortedArray[] ) {
  int pos = bs( k, sortedArray, 0, sortedArray.size - 1 );

  if( pos >= 0 ) return sortedArray[pos];
  else           return NODE_NOT_FOUND;
                 // bs can return  -(pos+1), i.e.
                  // position to insert the node with key k
}
```

Java-like pseudo code

Binární hledání – rekurze/iterace

```
//Recursive version
int bs( key k, nodeT a[], int first, int last ) {
  if( first > last ) return -(first + 1);  // not found
  int mid = ( first + last ) / 2;
  if( k < a[mid].key ) return bs( k, a, first, mid - 1);
  if( k > a[mid].key ) return bs( k, a, mid + 1, last );
  return mid;     // found!
}
```

Java-like pseudo code

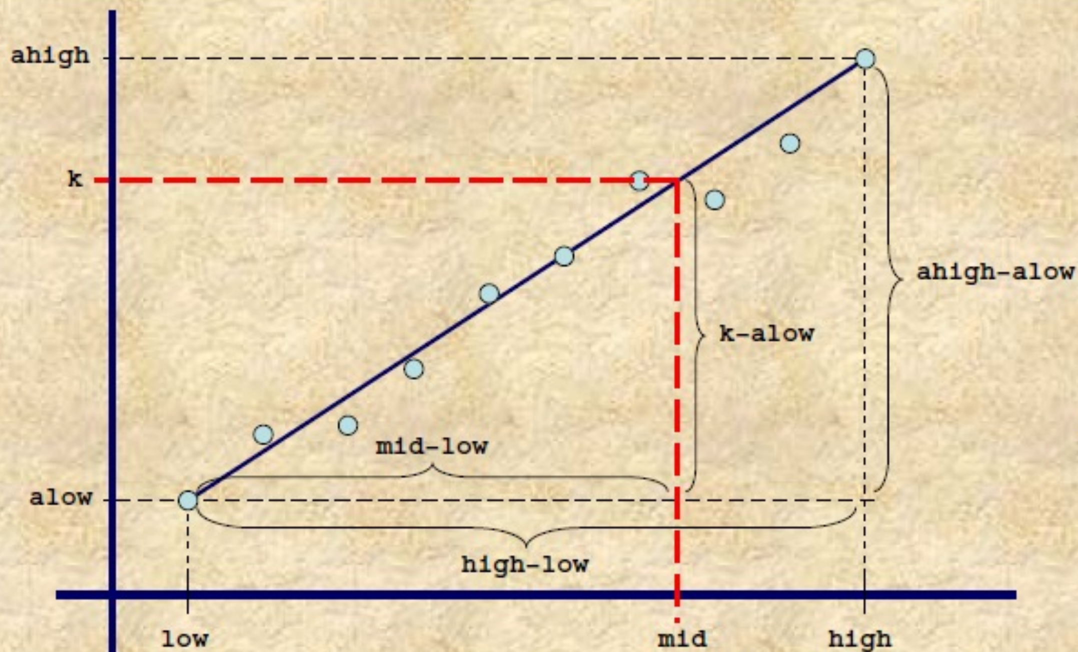
```
// Iterative version
int bs(key k, nodeT a[], int first, int last ) {
      while (first <= last) {
            int mid = (first + last) / 2; // mid point
            if (k > a[mid].key) first = mid + 1;
            else if (key < a[mid].key) last = mid - 1;
                 else return mid; // found
      } return -(first + 1); // failed to find key
}
```

Java-like pseudo code

Interpolační vyhledávání

Jak hledáme ve slovníku nebo v tlf seznamu? Určitě ne půlením …

Předpokládejme rovnoměrné rozložení (číselných) klíčů, umístění klíče odhadujeme podle jeho hodnoty interpolací:




```
  (k-alow) / (ahigh-alow) =
= (mid-low) / (high-low)
```

```
mid = low + (k-alow)*(high-low)/(ahigh-alow)
```

Porovnání binární/interpolační hledání

Binární hledání: O(log n)

```
mid = ( first + last ) / 2;
```

Interpolační hledání: O(log log n)

```
                    (last - first)
pos = first +     -----------------   (x - a[first])
                  a[last] - a[first]
```

```
Elem searchInterpol( Elem[] a, int low, int high, Key k) {
  if (low > high) return null;
  int mid = low + (k-a[low].key)*(high-low)/(a[high].key-a[low].key);
  if (a[mid].key == k) return a[mid];
  if (a[mid].key < k)
       return searchInterpol(Elem[] a, mid+1, high, k );
  else return searchInterpol(Elem[] a, low, mid-1, k );
}
```

Kořenový binární vyhledávací strom (BVS)

- *Kořenový binární strom*
  - uzel má 0, (1), 2 následníky (nemusí být pravidelný)

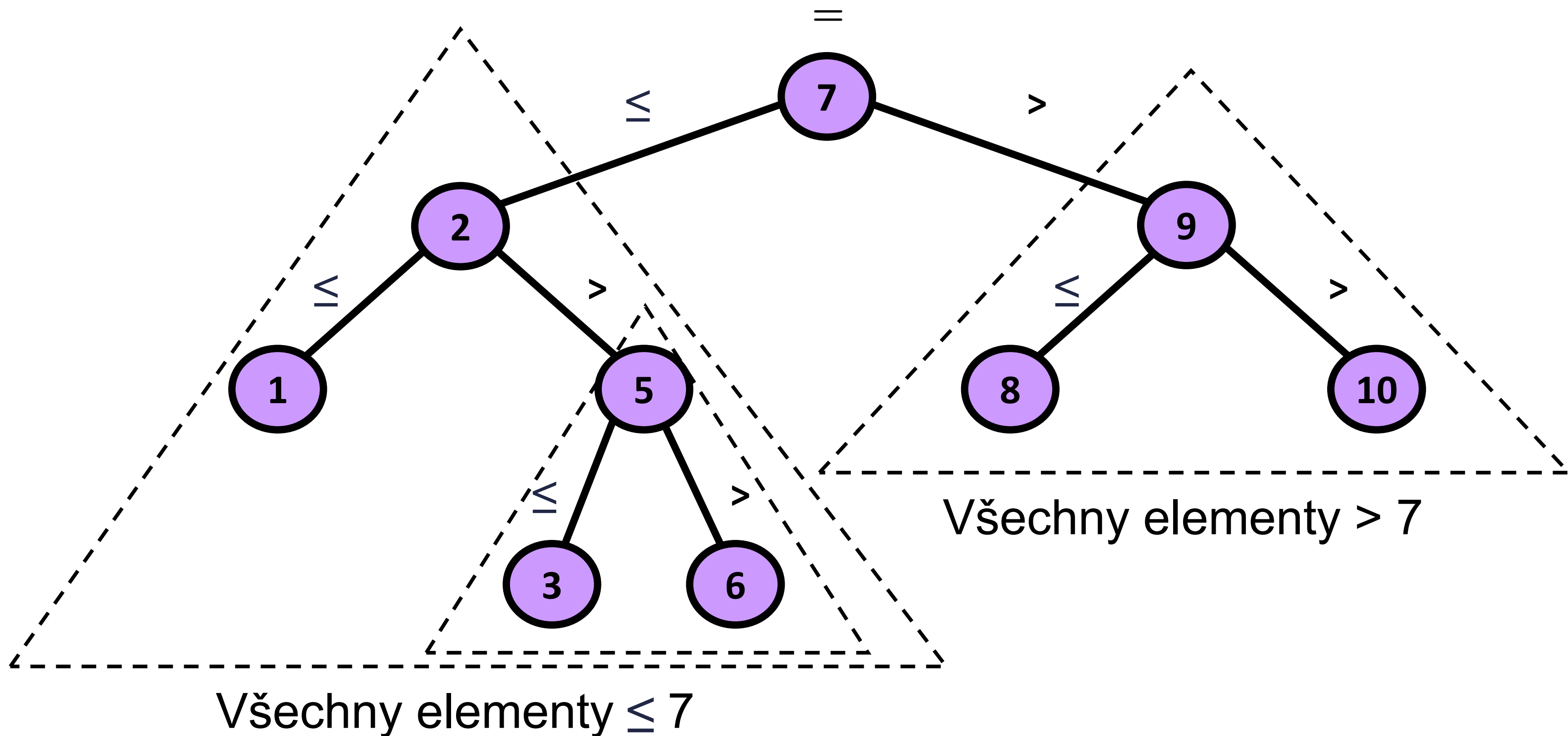
- Binární vyhledávací strom (BVS)
  - uspořádaný kořenový binární strom
  - *u* je kořen
  - pro všechny uzly u_L z levého podstromu platí:

    $$\text{klíč}(u_L) \leq \text{klíč}(u)$$

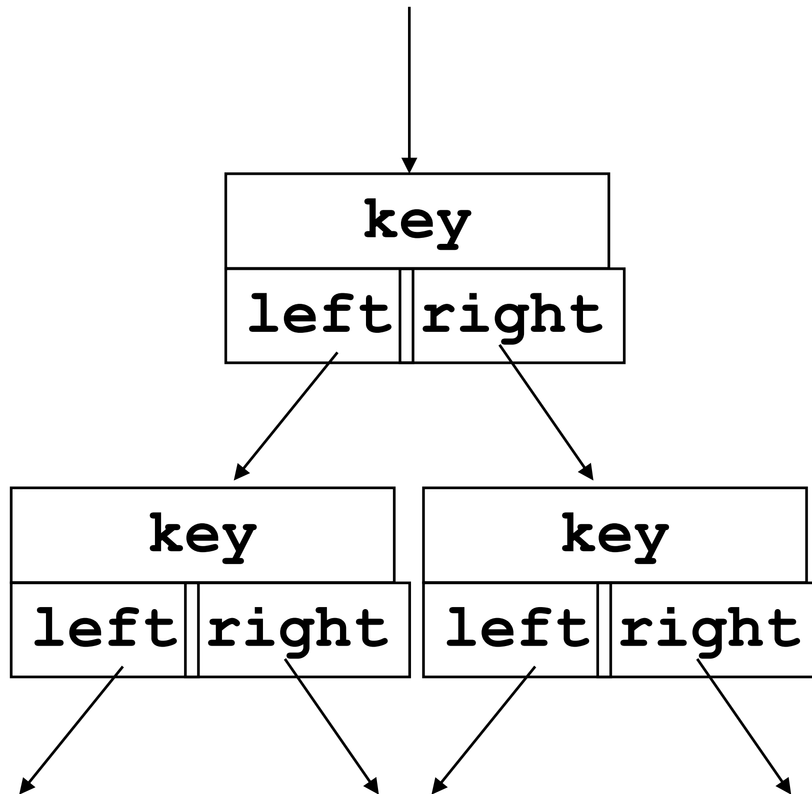
  - pro všechny uzly u_R z pravého podstromu platí:

    $$\text{klíč}(u_R) > \text{klíč}(u)$$

Binární vyhledávací strom (BVS)



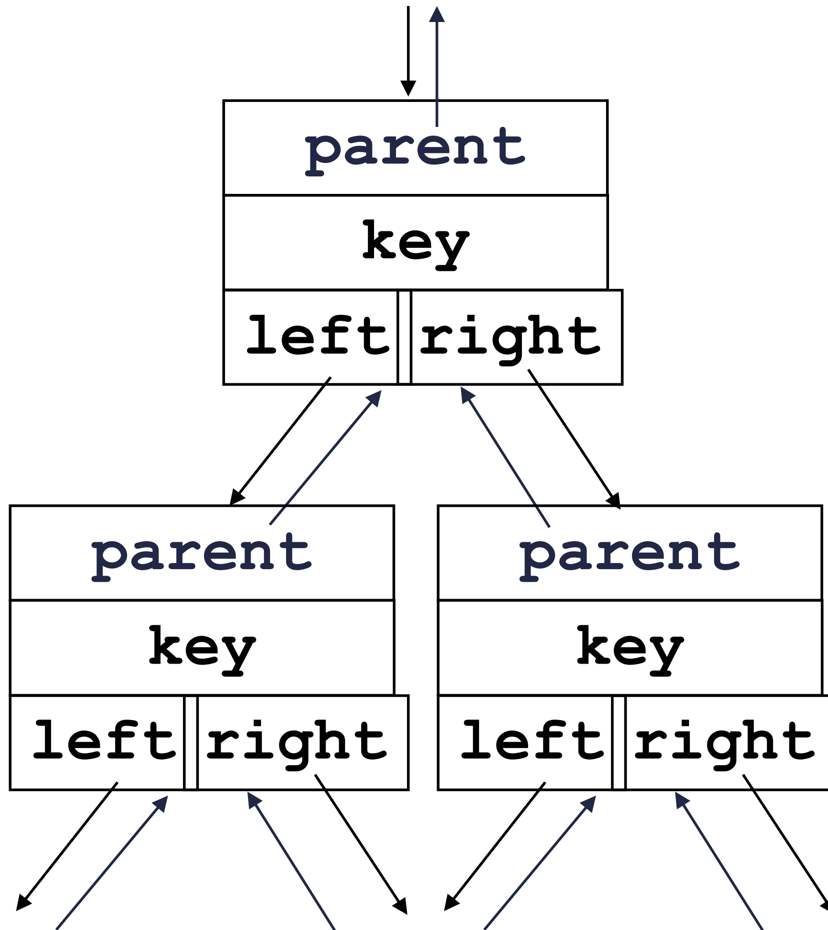
Reprezentace uzlů stromu



Výhodné pro:

- search
- min, max

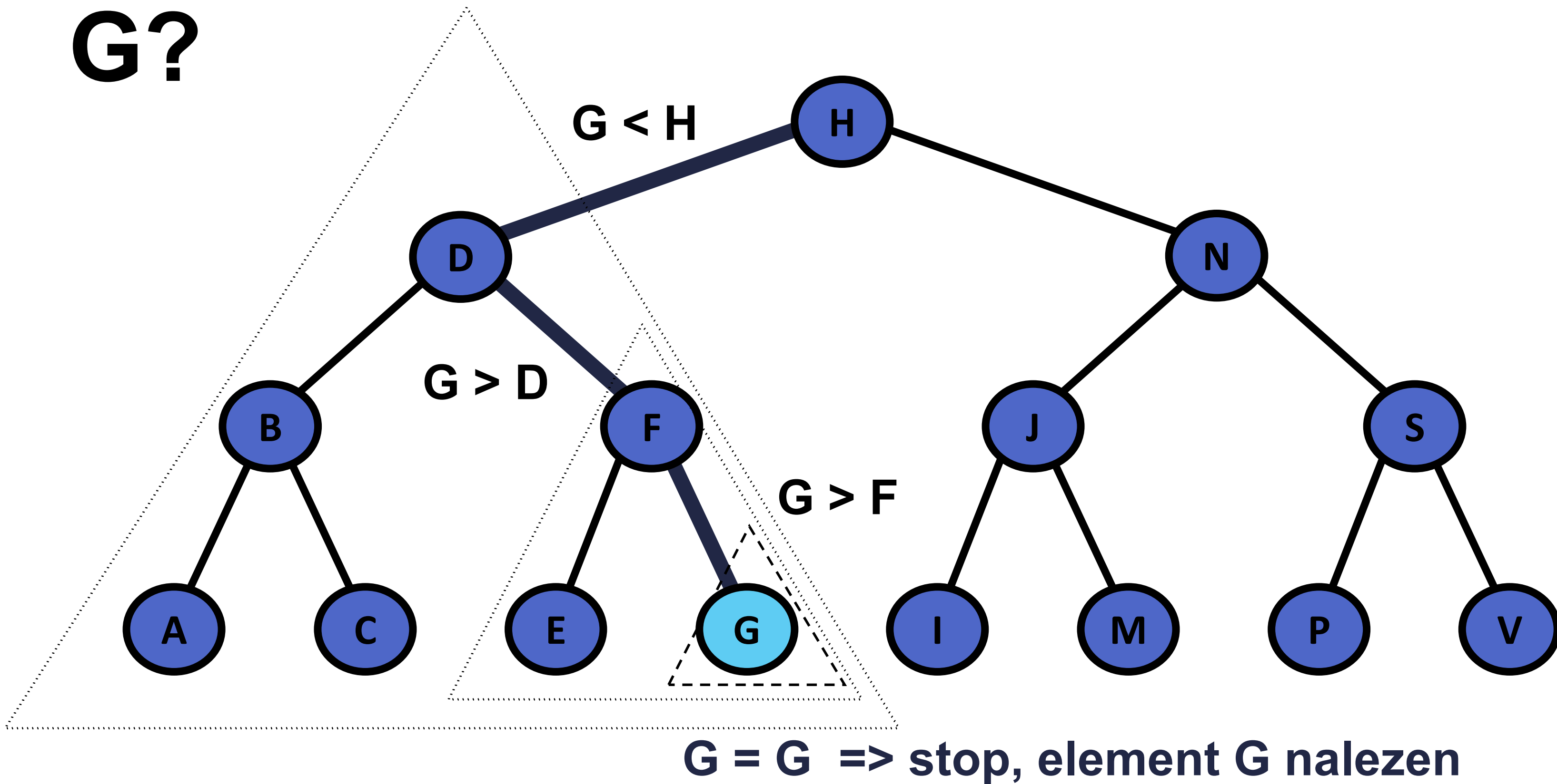
Reprezentace uzlů stromu II.



Vhodné pro:

- search
- min, max
- pred, succ

Prohledávání BVS



G = G => stop, element G nalezen

Prohledávání BVS – rekurzivně/iterativně

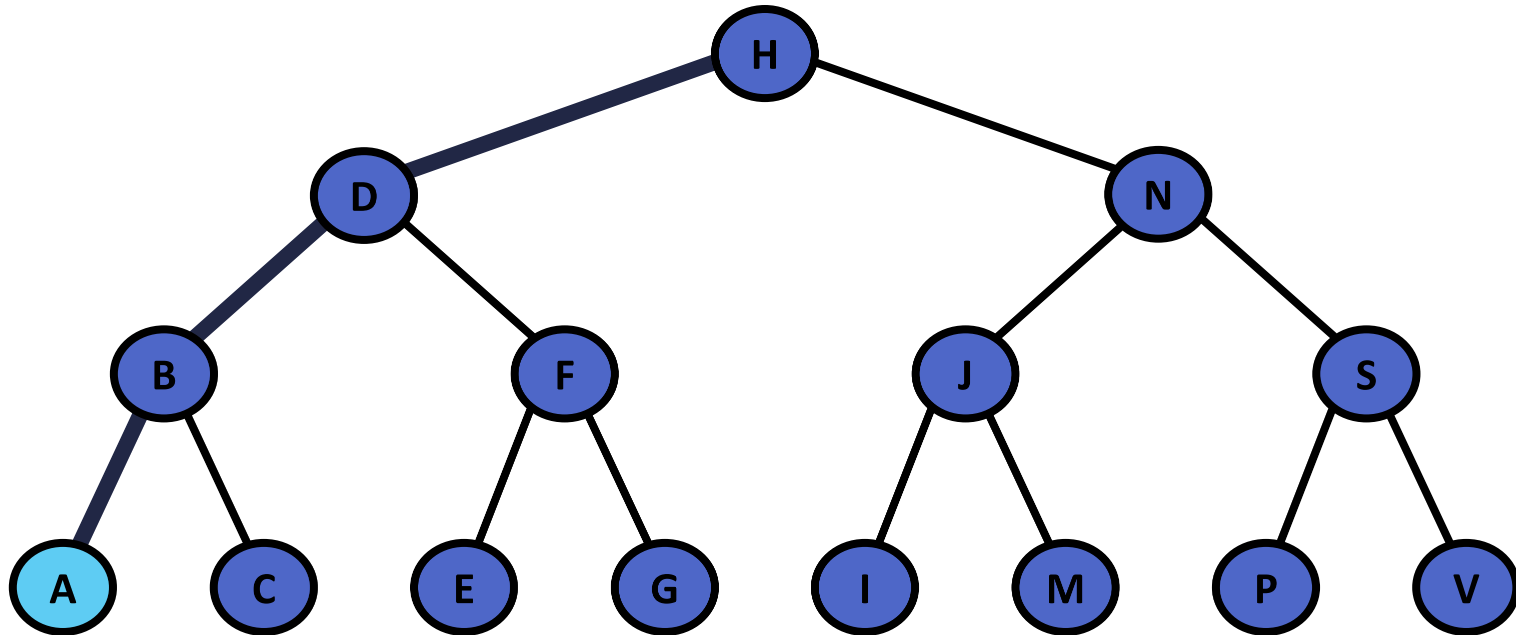
```
//Recursive version
Node treeSearch( Node x, key k )
{
  if(( x == null ) or ( k == x.key ))
    return x;
  if( k < x.key )
    return treeSearch( x.left, k );
  else
    return treeSearch( x.right, k );
}
```

Java-like pseudo code

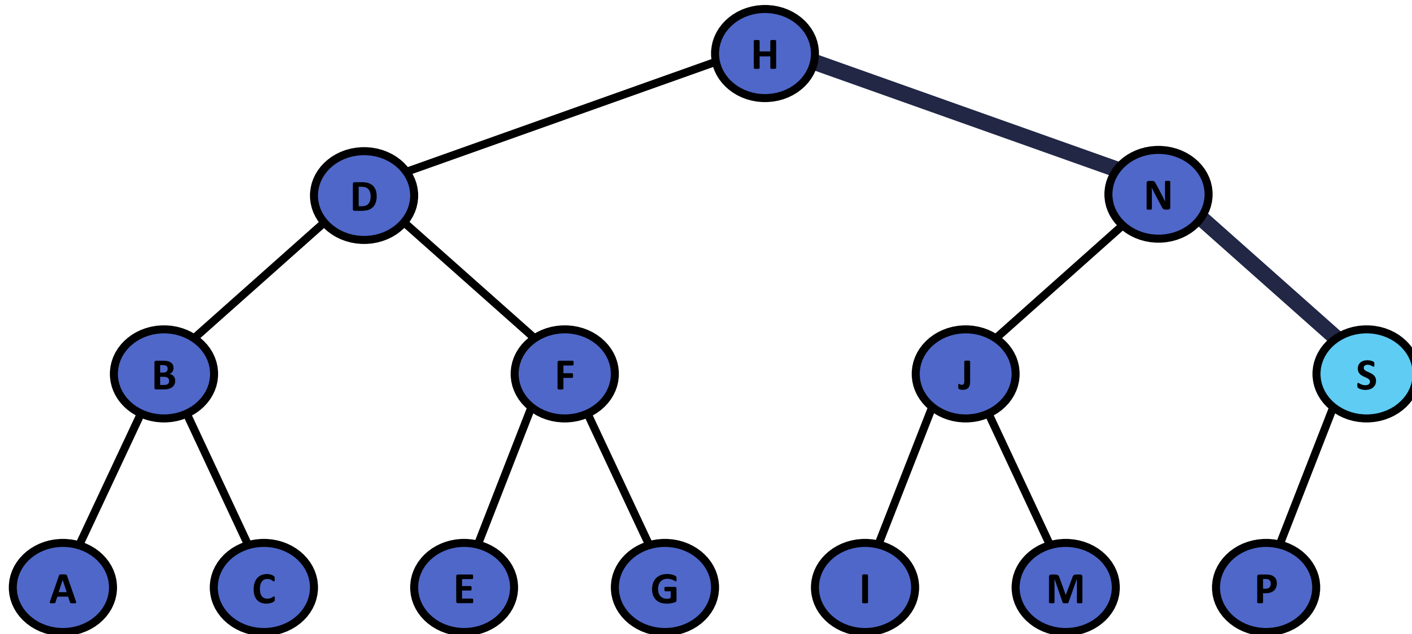
```
//Iterative version
Node treeSearch( Node x, key k )
{
  while(( x != null ) and (k != x.key ))
  {
    if( k < x.key ) x = x.left;
    else            x = x.right;
  }
  return x;}
```

Java-like pseudo code

Minimum pro BVS



Maximum pro BVS



Minimum a maximum pro BVS – iterativně

```
Node treeMinimum( Node x )
{
  if( x == null ) return null;
  while( x.left != null )
  {
    x = x.left;
  }
  return x;
}
```

Java-like pseudo code

```
Node treeMaximum( Node x )
{
  if( x == null ) return null;
  while( x.right != null )
  {
    x = x.right;
  }
  return x;
}
```

Java-like pseudo code

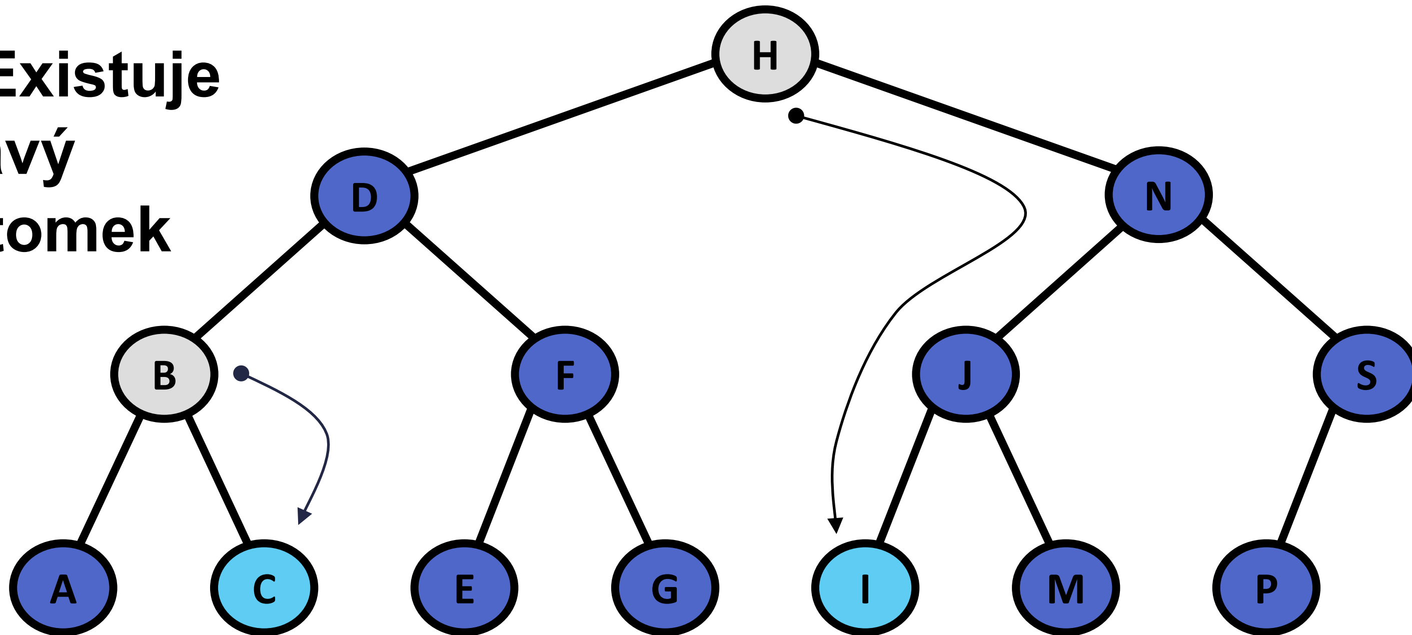
Následník v BVS
podle uspořádání (in-order tree walk)

- Jsou dvě možnosti:
  1. **Existuje pravý potomek**
  2. Neexistuje pravý potomek

Následník v BVS

podle uspořádání (in-order tree walk)

1. Existuje pravý potomek



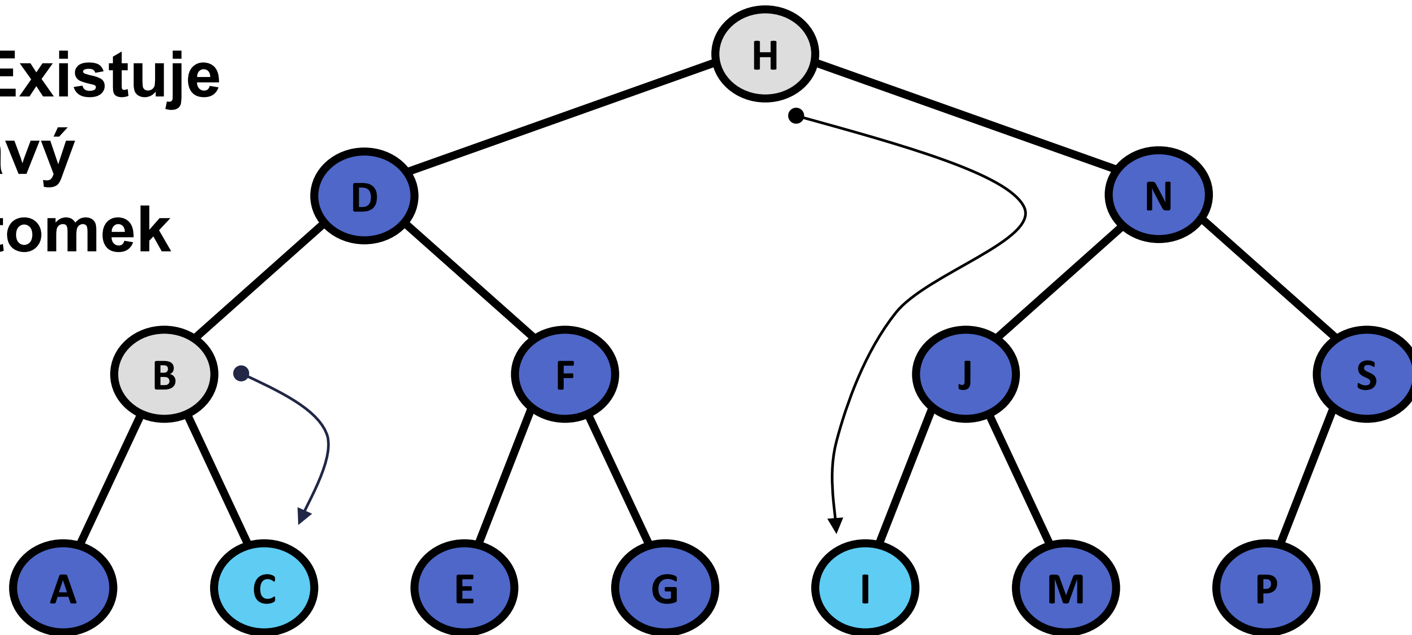
`succ(B) -> C`
`succ(H) -> I`

Jak?

Následník v BVS

podle uspořádání (in-order tree walk)

1. Existuje pravý potomek




```
succ(B)  -> C
succ(H)  -> I
```

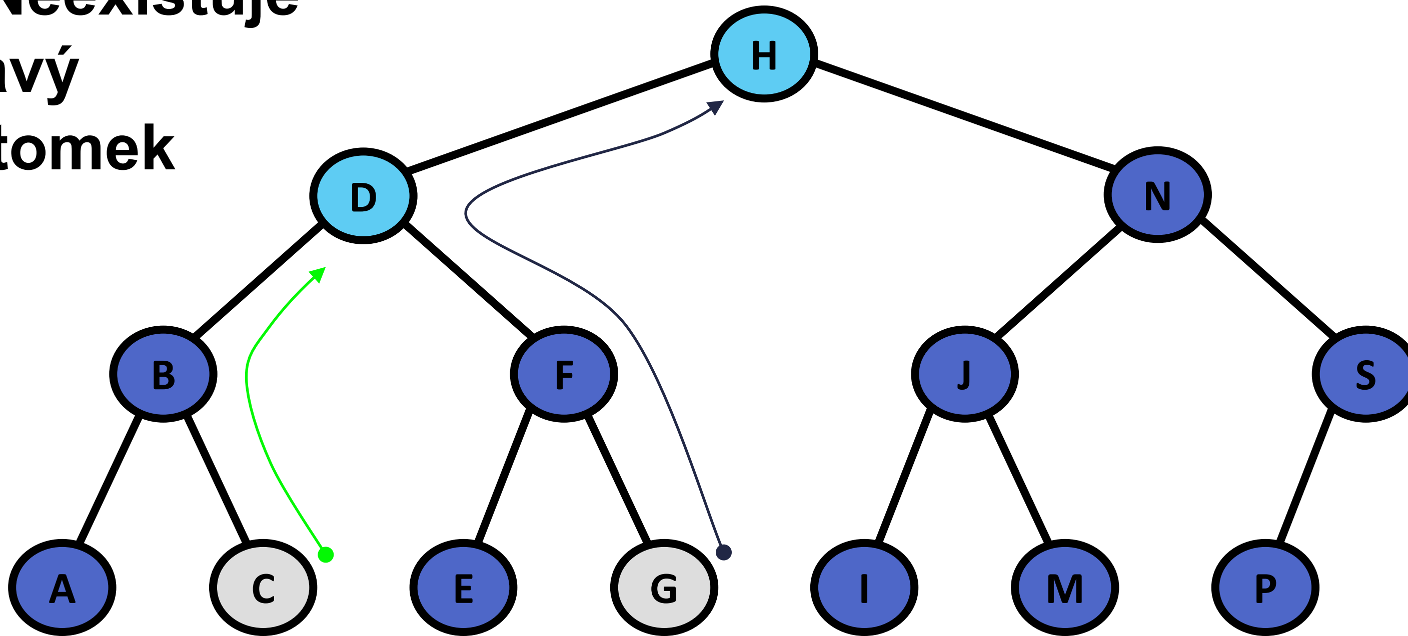
Najdi *minimum* v pravé větvi

= min(x.right)

Následník v BVS

podle uspořádání (in-order tree walk)

1. Neexistuje pravý potomek



`succ(C) -> D`

`succ(G) -> H`

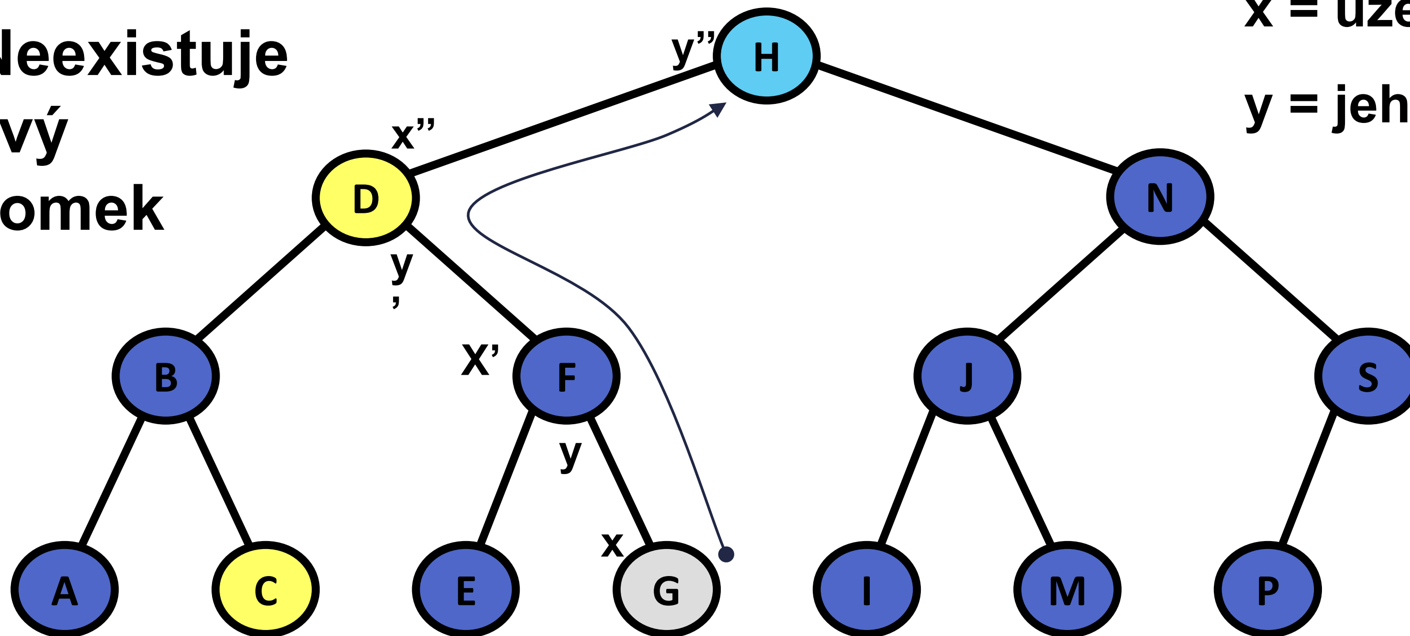
Jak?

Následník v BVS
podle uspořádání (in-order tree walk)

1. Neexistuje pravý potomek

x = uzel na cestě

y = jeho rodič



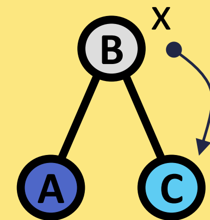
`succ(G) -> H`

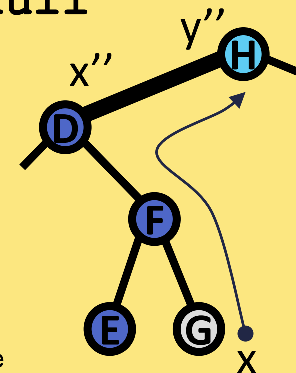
Najdi *minimálního rodiče vpravo* (minimální rodič na cestě do kořene)

Následník v BVS
podle uspořádání (in-order tree walk)

x = uzel na cestě, y = jeho rodič

```
Node treeSuccessor( Node x )
{
  if( x == null ) return null;

  if( x.right != null )  // 1. right son exists
    return treeMinimum( x.right );

  y = x.parent;               // 2. right son is null
  while( (y != null) and (x == y.right))
  {
    x = y;
    y = x.parent;
  }
  return y;     // first parent x is left from
}
```

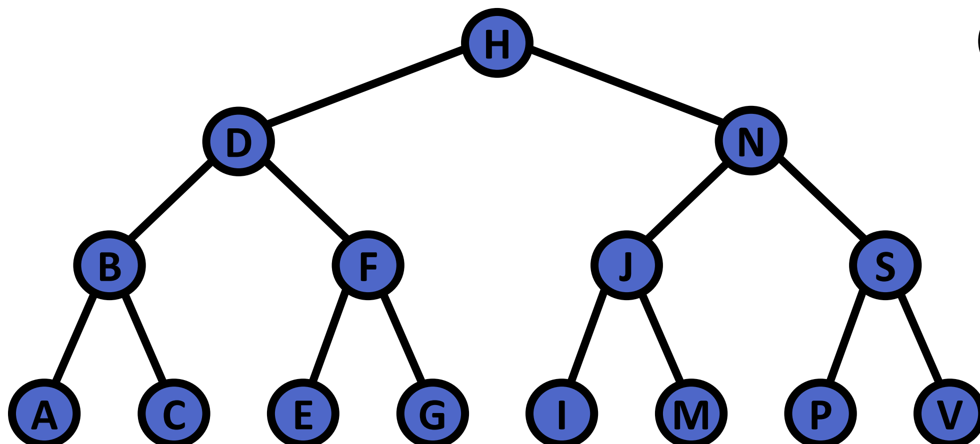


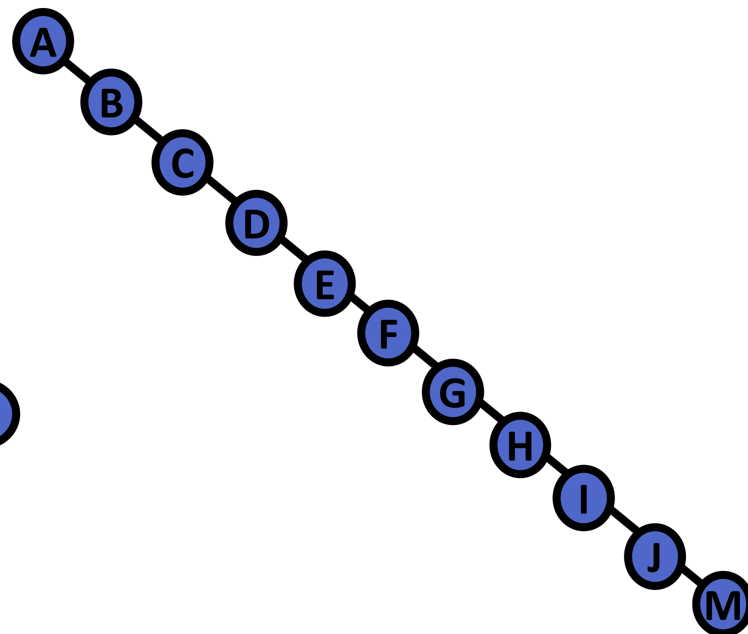


Java-like pseudo code

Operační složitost

Dynamické operace **`search,max,min,succ,pred`** mají operační složitost O(h), kde h je hloubka vyhledávacího stromu.



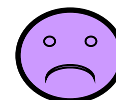


$h = \log_2(n)$

=> *O(log(n))*

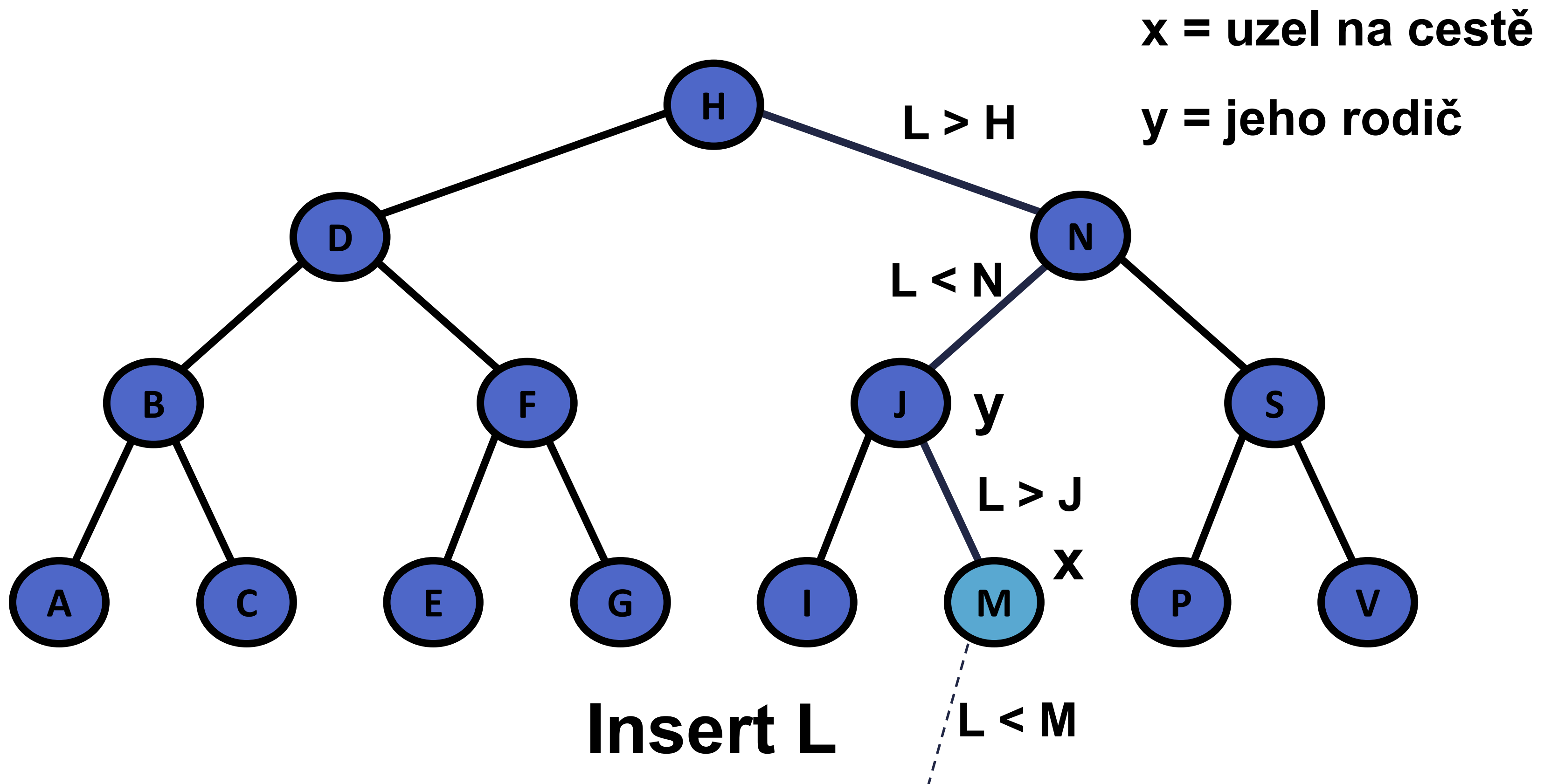
h = n

=> *O(n)* !!!



=> strom je třeba vyvážit!!!

Insert (vložení prvku)



1. Najdi list, který bude rodičem … M
2. Připoj nový element jako nový list … M.left

Insert (vložení prvku)

x = uzel na cestě, y = jeho rodič

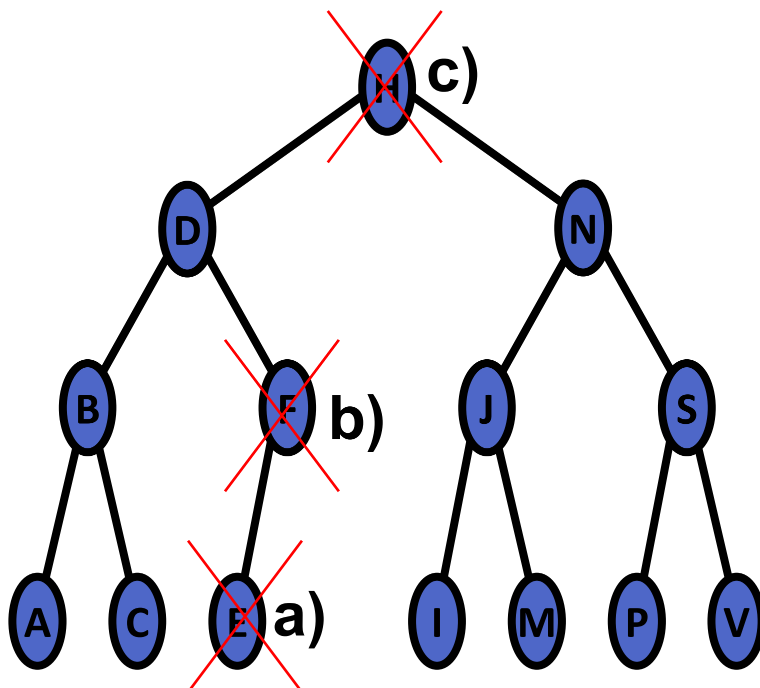
```
void treeInsert( Tree t, Node e )
{
  x = t.root; y = null;  // set x to tree root

  if( x == null )
       t.root = e;            // tree was empty
  else {
    while(x != null) {   // find the parent leaf
       y = x;
       if( e.key < x.key ) x = x.left;
                      else x = x.right;
    }
    if( e.key < y.key )    y.left  = e; // add e to parent y
                 else y.right = e;
  }
}
```

Java-like pseudo code

Jednoduchá verze – bez „update“ pro stejné klíče.

Operační složitost: najdi list + vložení = $O(\log_2 n) + O(1) =$ **$O(\log_2 n)$**

Delete (odstranění prvku)



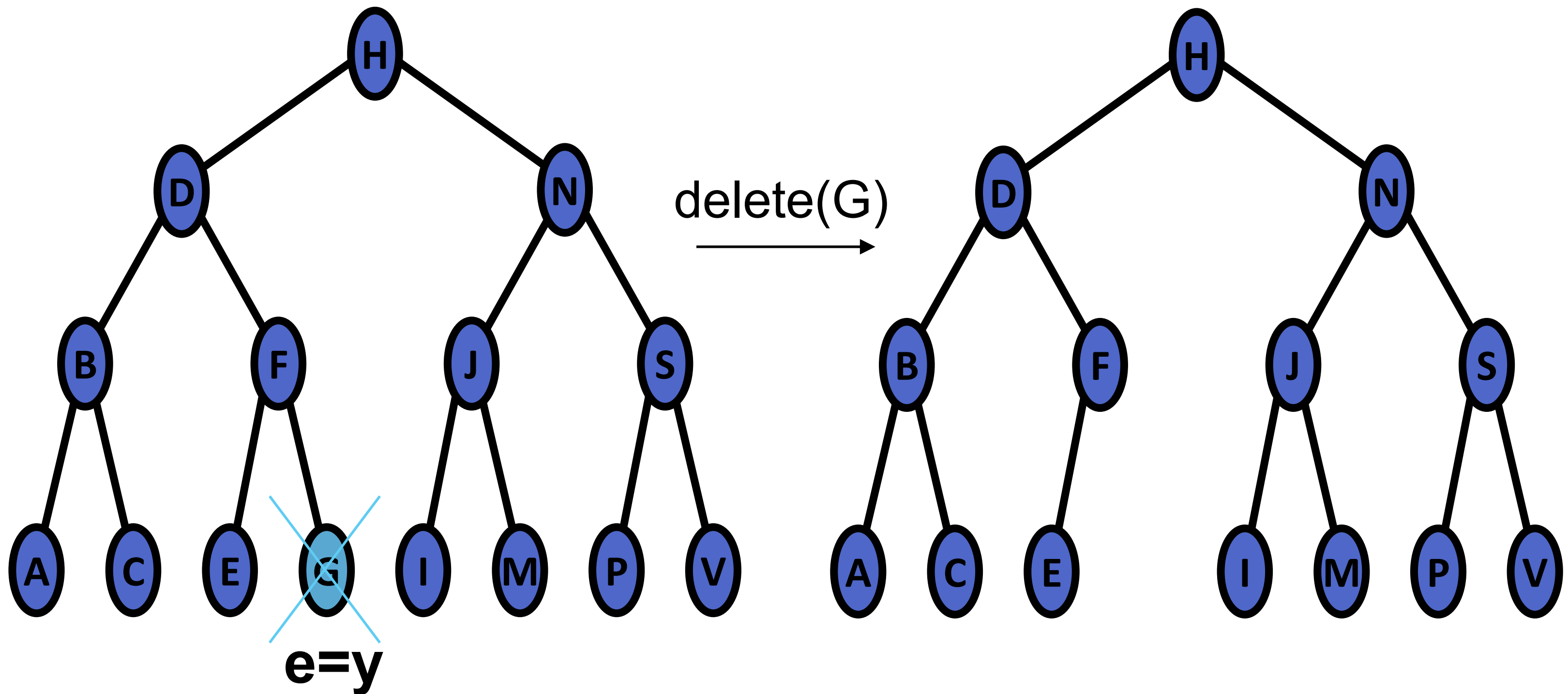
Delete – 3 případy

a) rušíme list, který nemá potomky

b) rušíme list, který má jednoho potomka

c) rušíme list, který má dva potomky

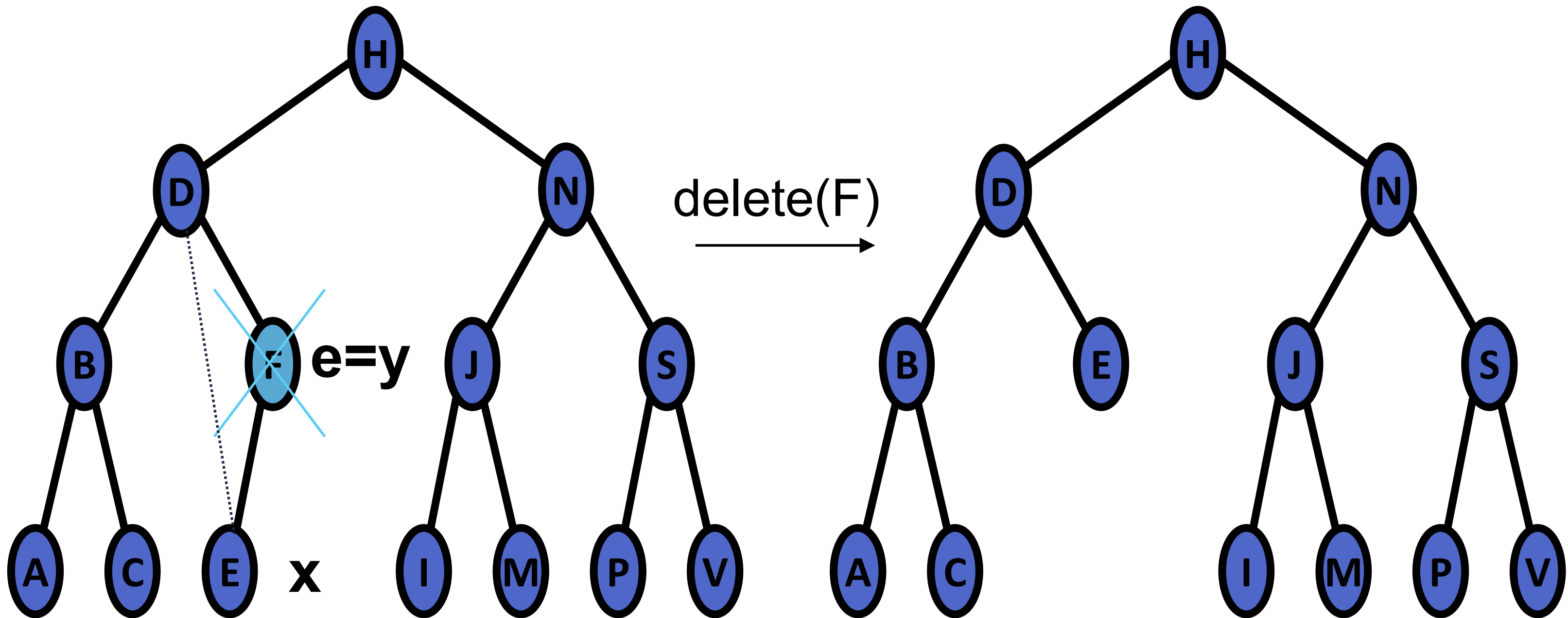
Delete (odstranění prvku)
a) smaž list



a) list bez potomků lze jednoduše vypustit

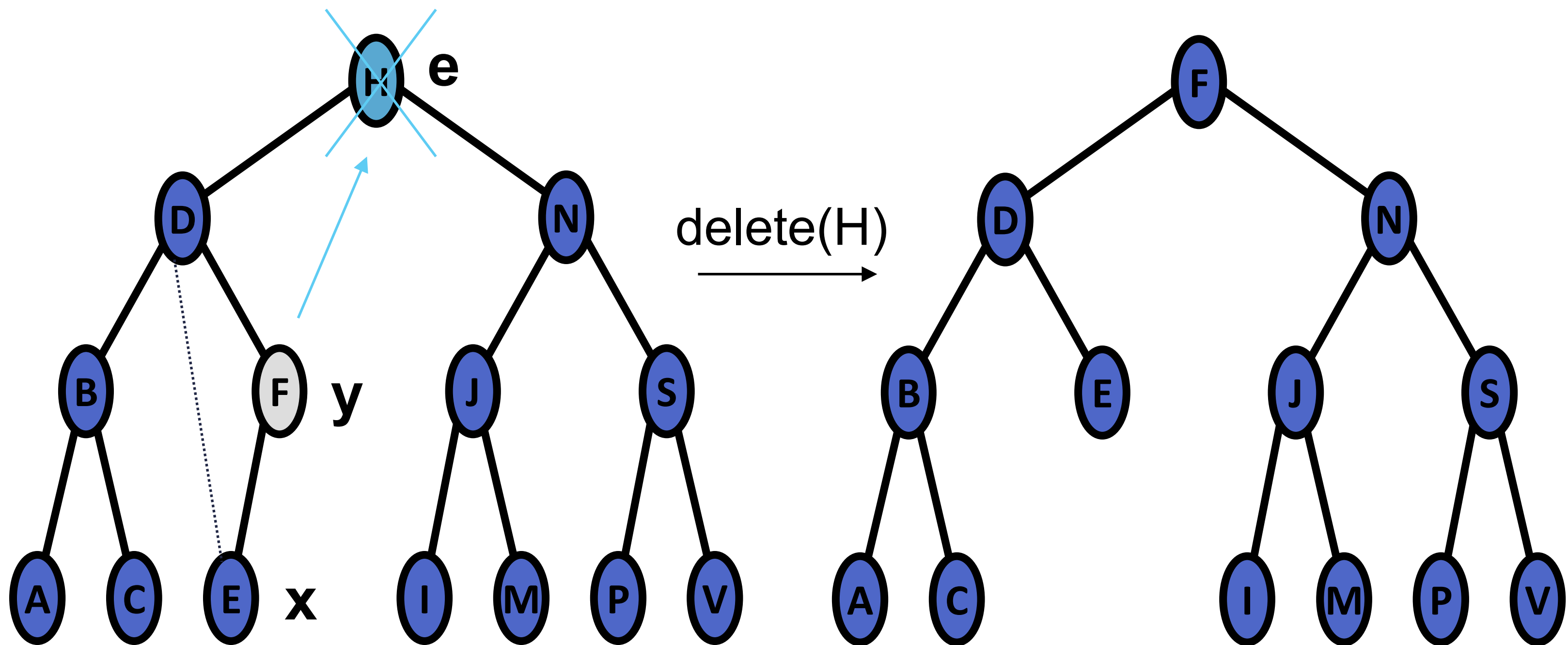
Delete (odstranění prvku)

b) vnitřní s potomkem



b) uzel s jedním potomkem - přemosti vymazaný uzel

Delete (odstranění prvku)
c) se 2 potomky



c) uzel se dvěma potomky -> nahraď uzel jeho předchůdcem (`pred`) a vypusť předchůdce, nebo následníkem (`succ`) a vypusť následníka

Vyvažování stromu (Tree balancing)

Operace nad BVS jsou závislé na míře vyváženosti stromu – pro vyvážený strom dosahují $O(\log_2 n)$, pro nevyvážený $O(n)$.

Vyváženost:

- Silná podmínka – shoda *h* (Ideální případ)

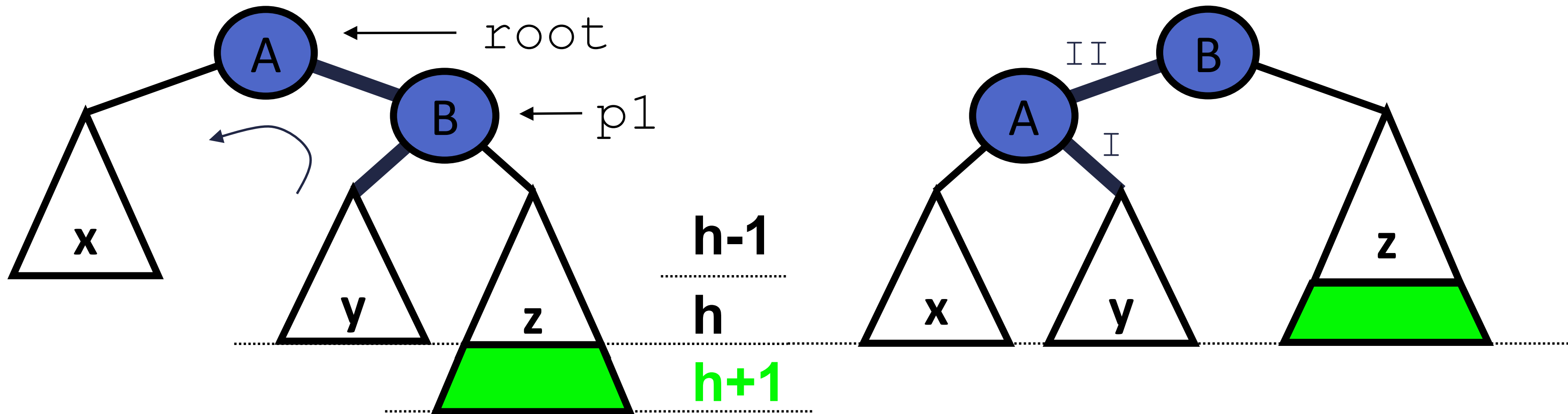
  Pro všechny uzly platí:

  počet uzlů vlevo = počet uzlů vpravo

- Slabší podmínky
  - **výška** podstromů se liší max o 1: AVL strom
  - stejná **černá výška:** červeno-černý strom

Pomocné operace pro udržení vyvážení stromu – rotace

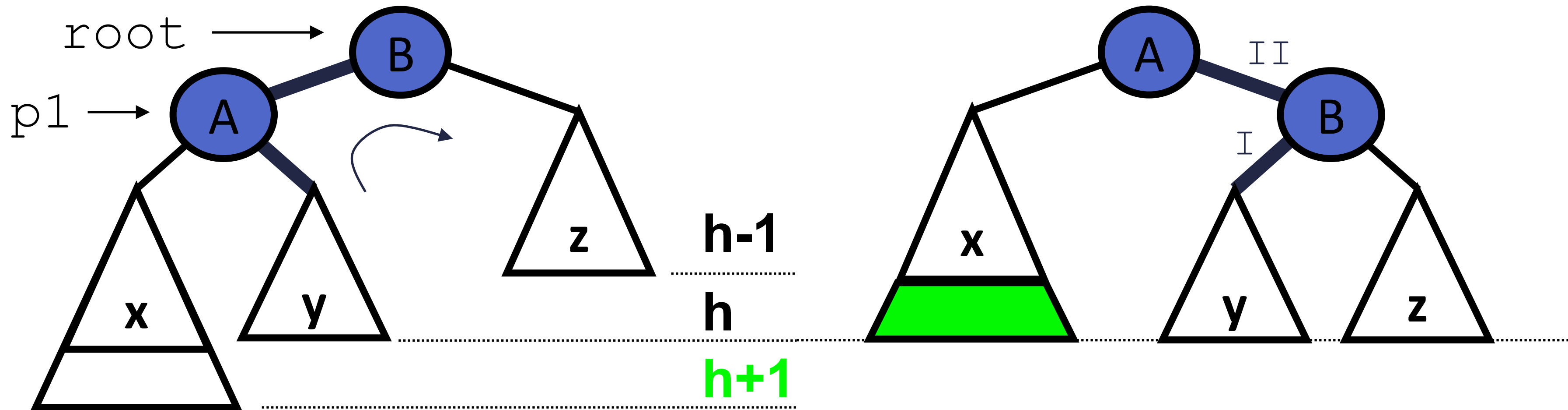
L rotace (Left rotation)




```
Node leftRotation( Node root ) {    // subtree root!!!
      if( root == null ) return root;
      Node p1 = root.right;          (init)
      if (p1 == null) return root;
      root.right = p1.left;          (I)
      p1.left    = root;             (II)
      return p1;
}
```

Java-like pseudo code

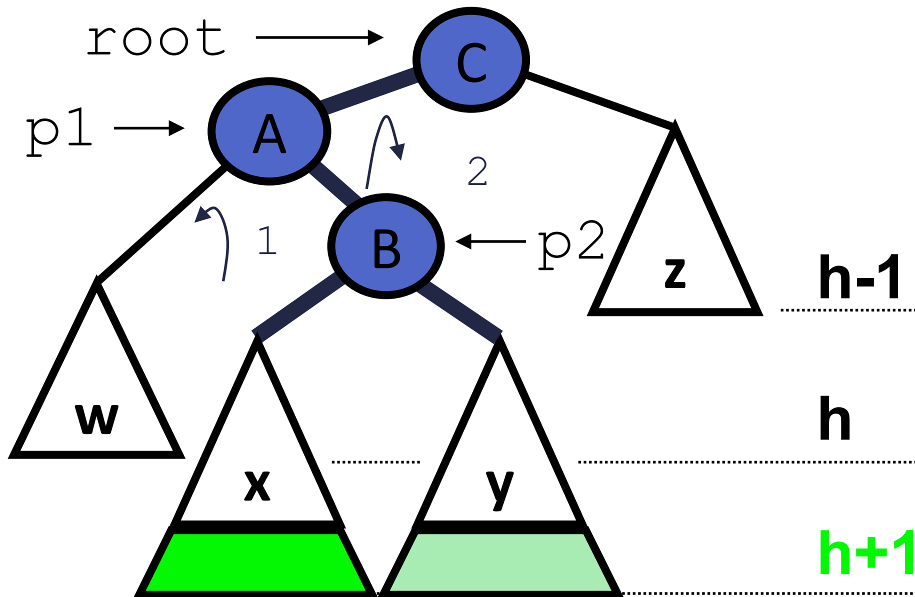
R rotace (right rotation)

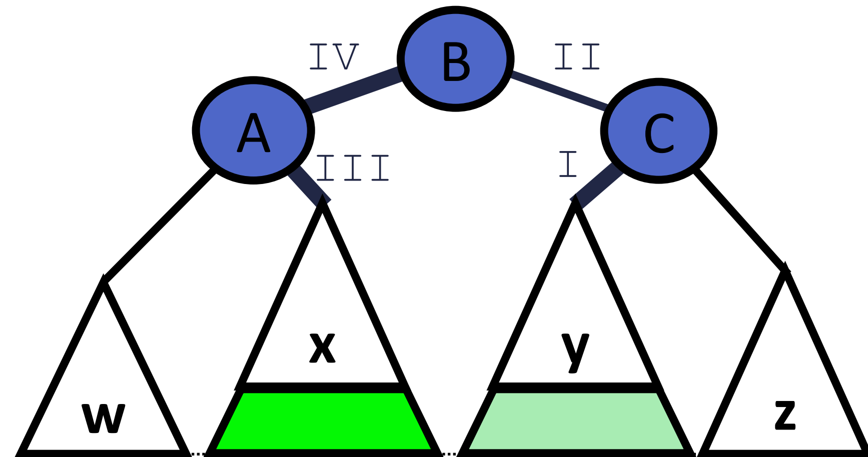



```
Node rightRotation( Node root ) {     // subtree root!!!
      if( root == null ) return root;
      Node p1 = root.left;          (init)
      if (p1 == null) return root;
      root.left = p1.right;         (I)
      p1.right  = root;             (II)
      return p1;
}
```

Java-like pseudo code

LR rotace (left-right rotation)

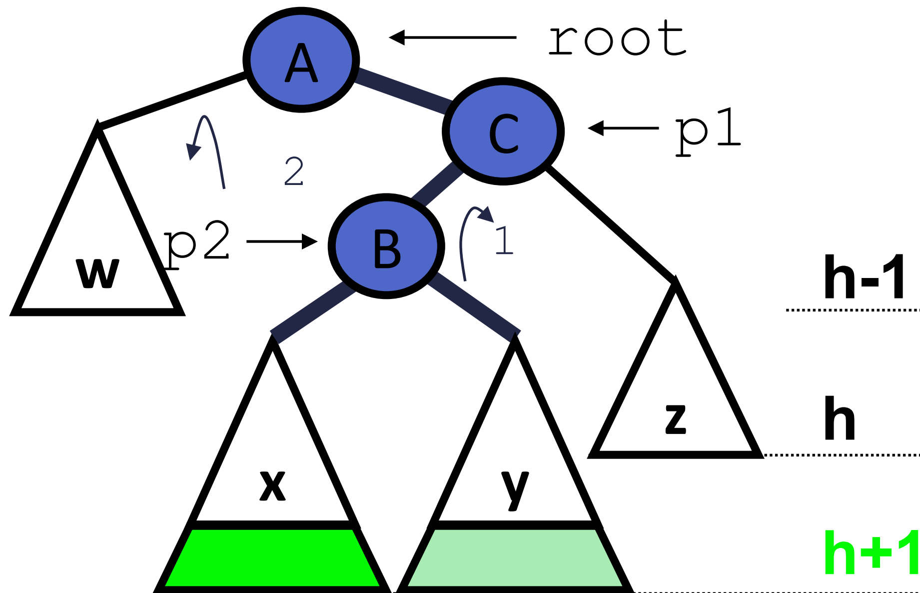


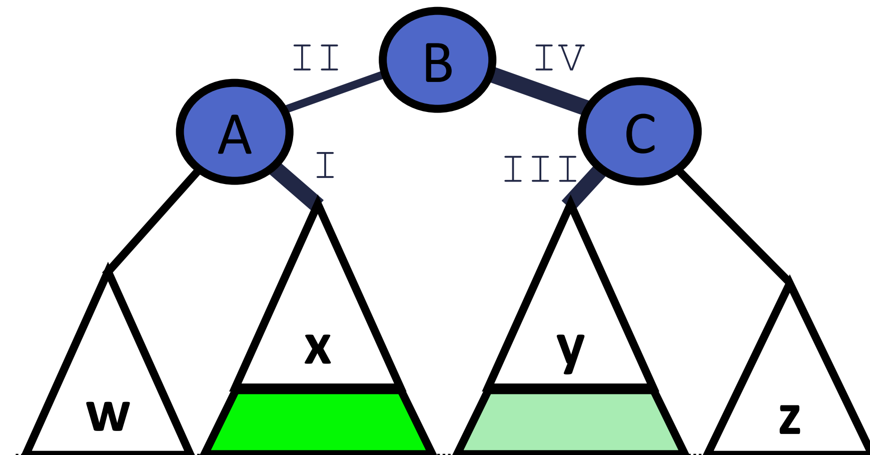



```
Node leftRightRotation( Node root ) {   if(root==null)..;
      Node p1 = root.left; Node p2 = p1.right;    (init)
      root.left = p2.right; (I)
      p2.right = root;      (II)
      p1.right = p2.left;   (III)
      p2.left = p1;         (IV)
      return p2;     }
```

Java-like pseudo code

RL rotace (right- left rotation)






```
Node rightLeftRotation( Node root ) {   if(root==null)....;
      Node p1 = root.right; Node p2 = p1.left;     (init)
      root.right = p2.left; (I)
      p2.left = root;       (II)
      p1.left = p2.right;   (III)
      p2.right = p1;        (IV)
      return p2;    }
```

Java-like pseudo code

AVL stromy

- AVL strom **[Richta90]**
  - Výškově vyvážený strom (Georgij Maximovič **A**delson-**V**elskij a Evgenij Michajlovič **L**andis)
  - Výška prázdného stromu = -1
  - Pro uzly sleduje rozdíl výšek potomků **`bal`** = {-1, 0, 1}

AVL strom (AVL tree)

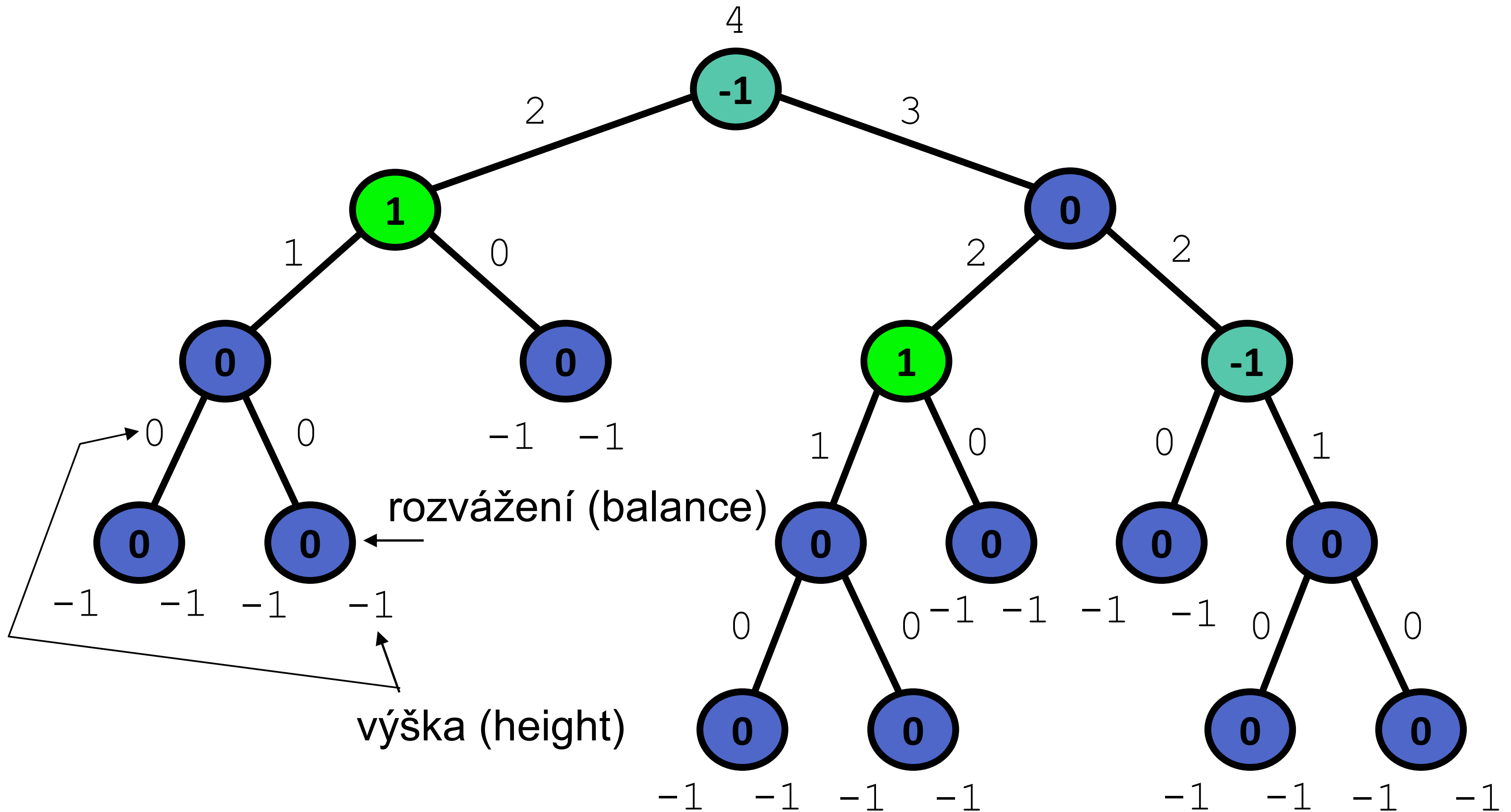
- // A very inefficient recursive definition

```
int height( Node t )
{
   if( t == null )
       return -1;    //leaf
   else
      return 1 + max( height( t.left ),
                      height( t.right ) );
}
```

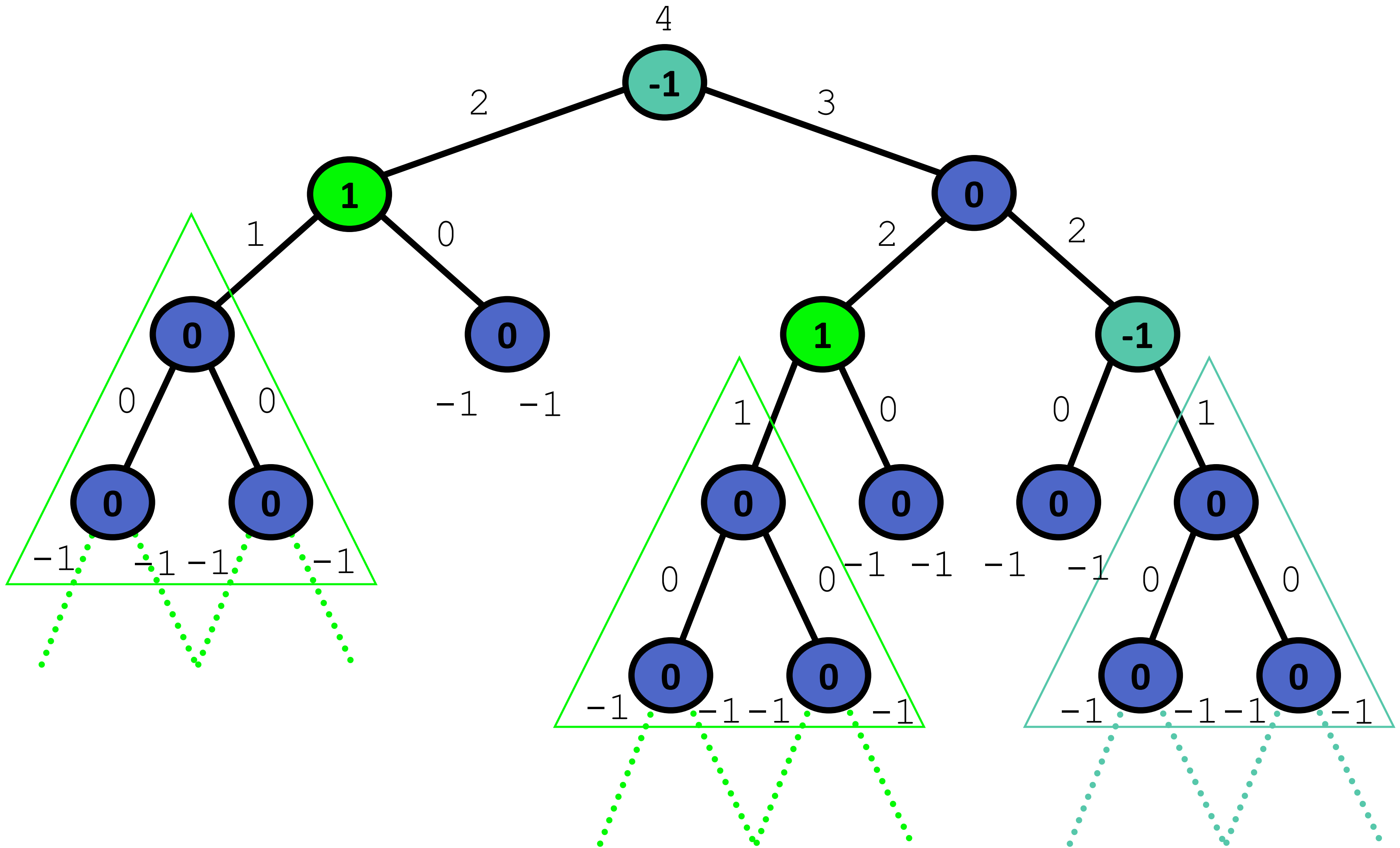
```
int bal( Node t )
{
   return height( t.left ) - height( t.right );
}
```

Java-like pseudo code

AVL strom - výšky a rozvážení

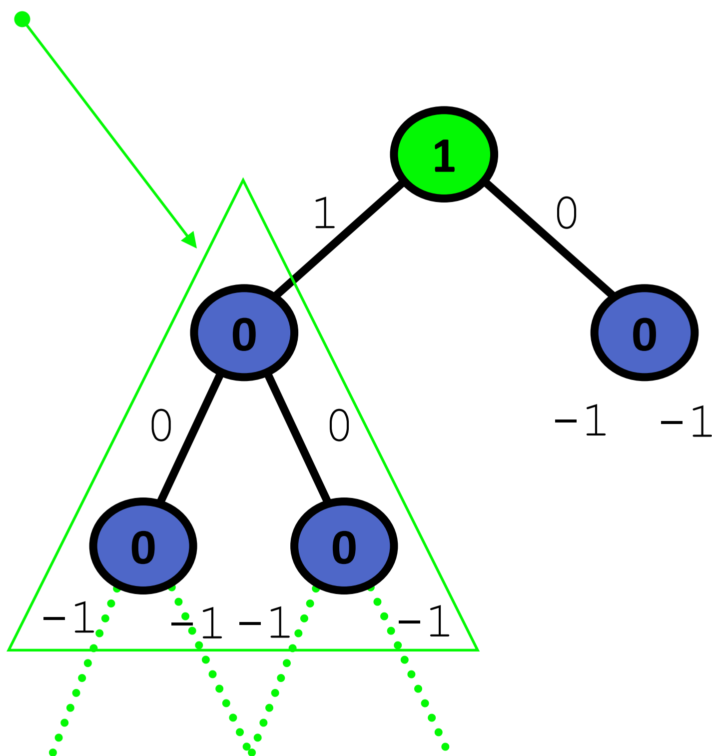


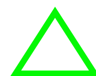
AVL strom před vložením uzlu



AVL strom - nejmenší podstrom

Nejmenší podstrom, který se přidáním uzlu rozváží z 0





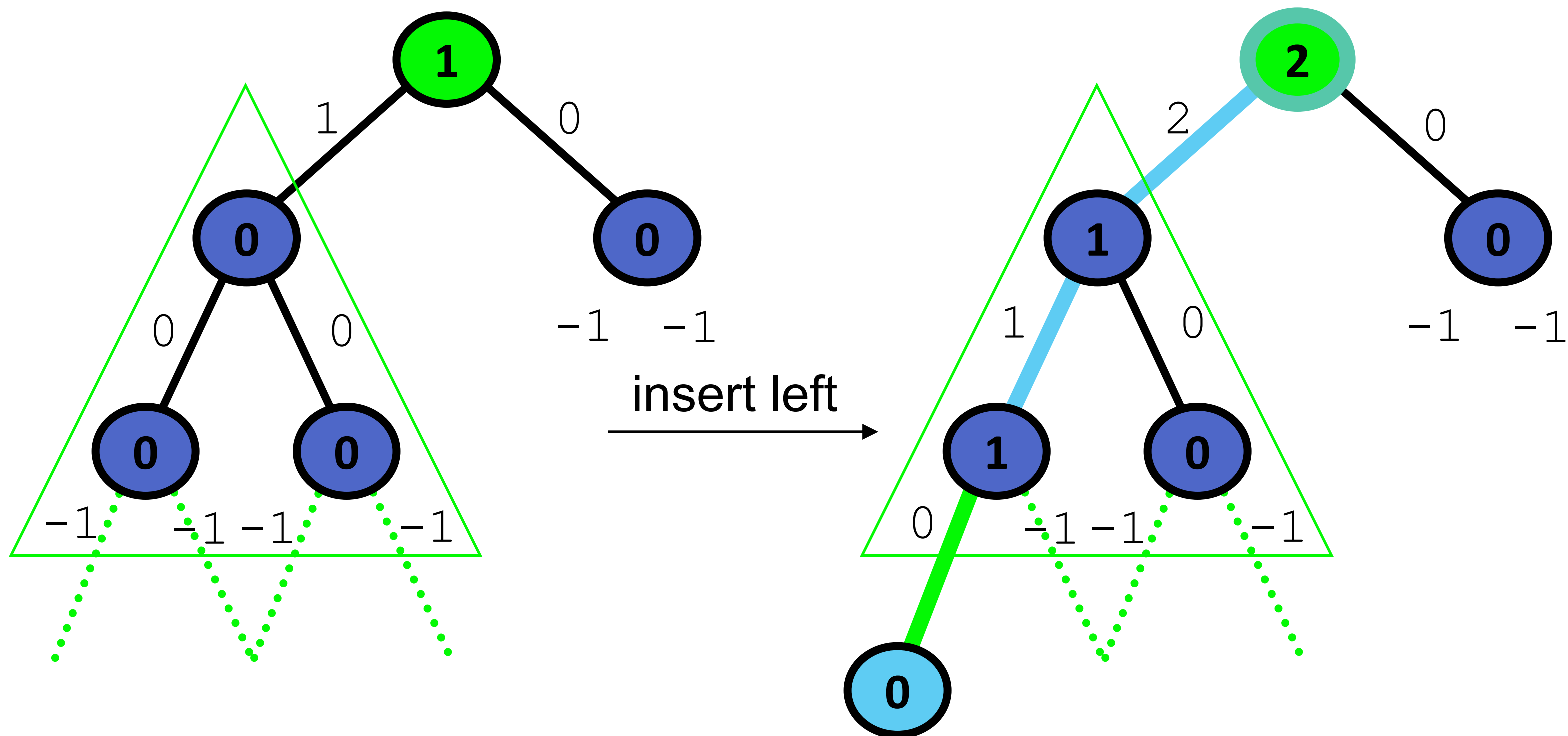
- Je vyvážený: bal = 0
- Po operaci insert zůstává vyvážený

bal $\in \langle -1,+1 \rangle$

Nejmenší – modifikace blízko k listům

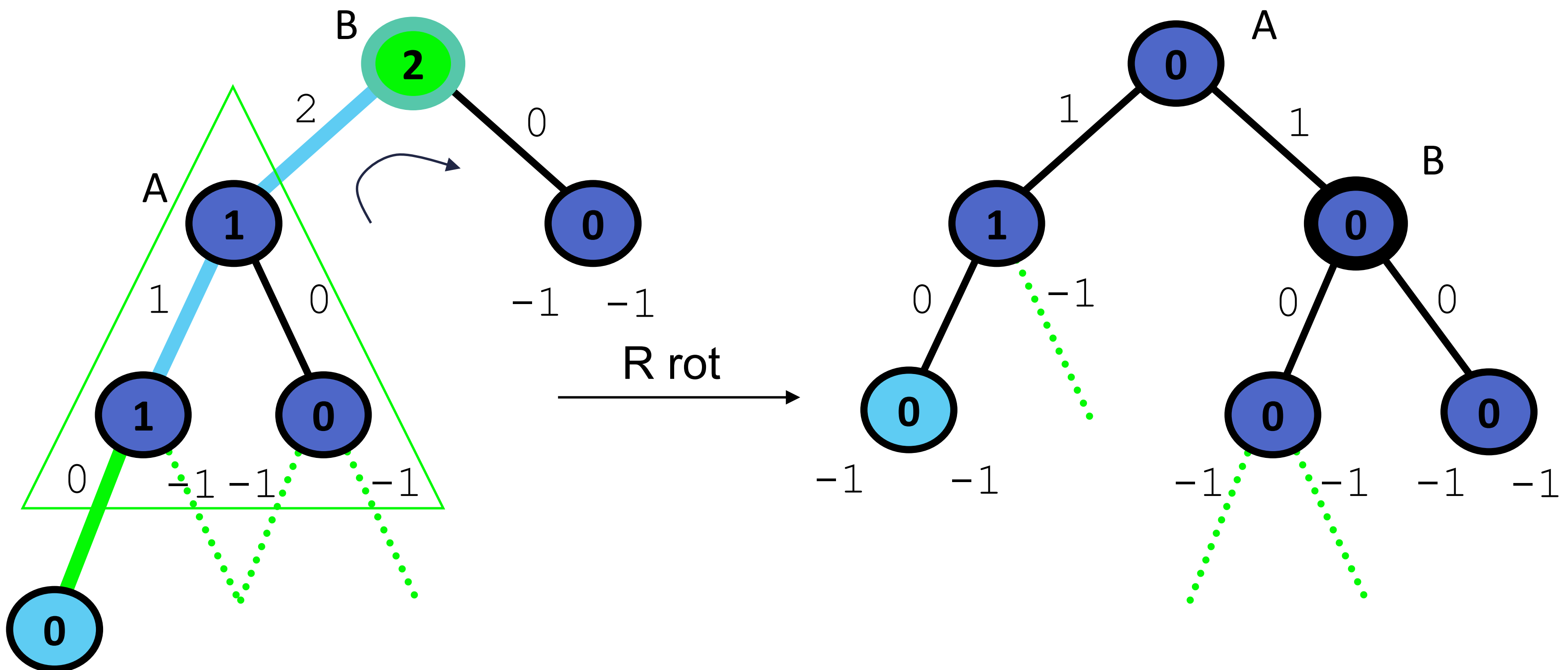
AVL strom - vložení uzlu doleva

a) Podstrom se přidáním uzlu doleva rozváží



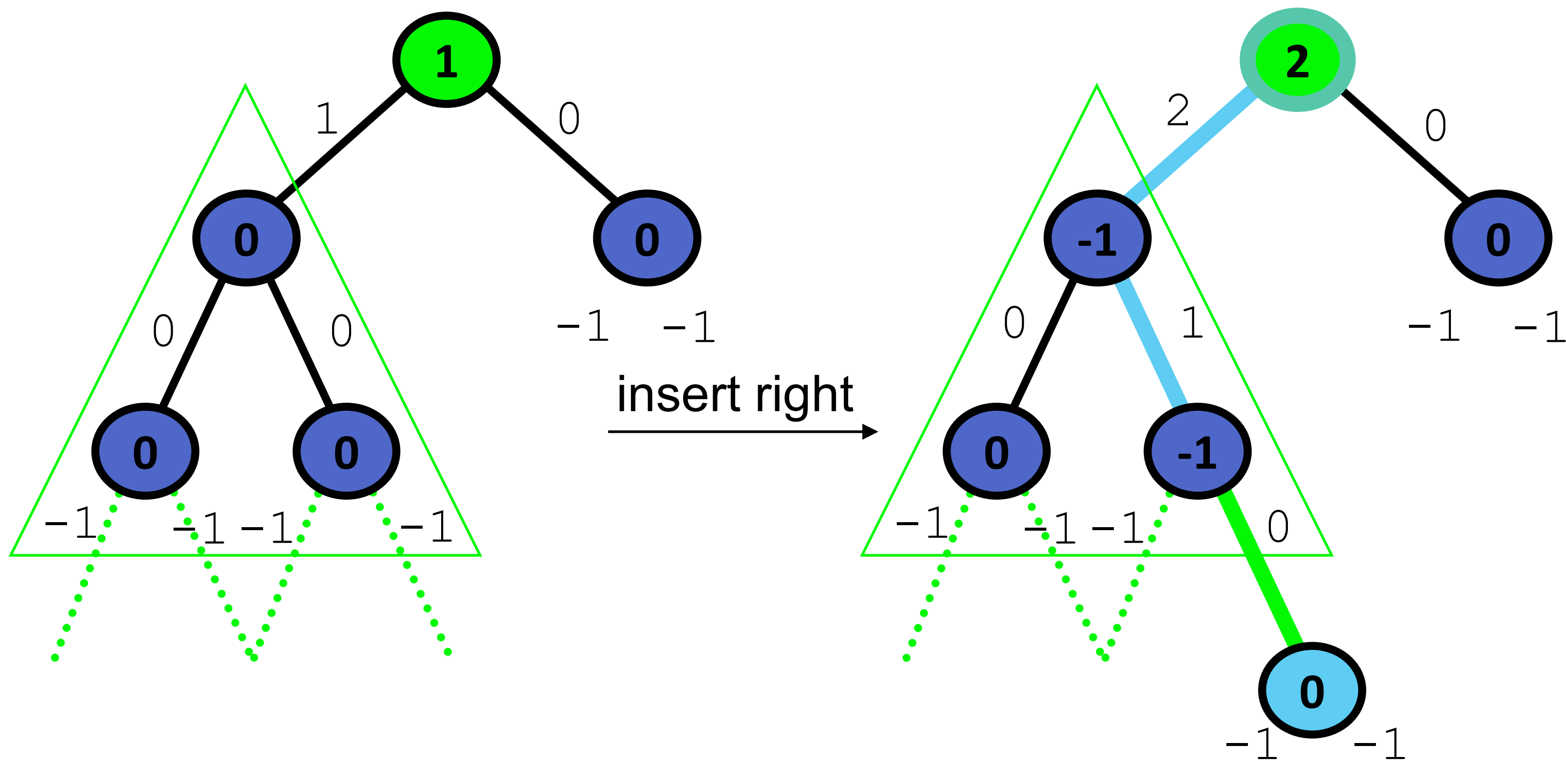
AVL strom - pravá rotace

a) Vložen doleva – doleva => korekce pravou rotací



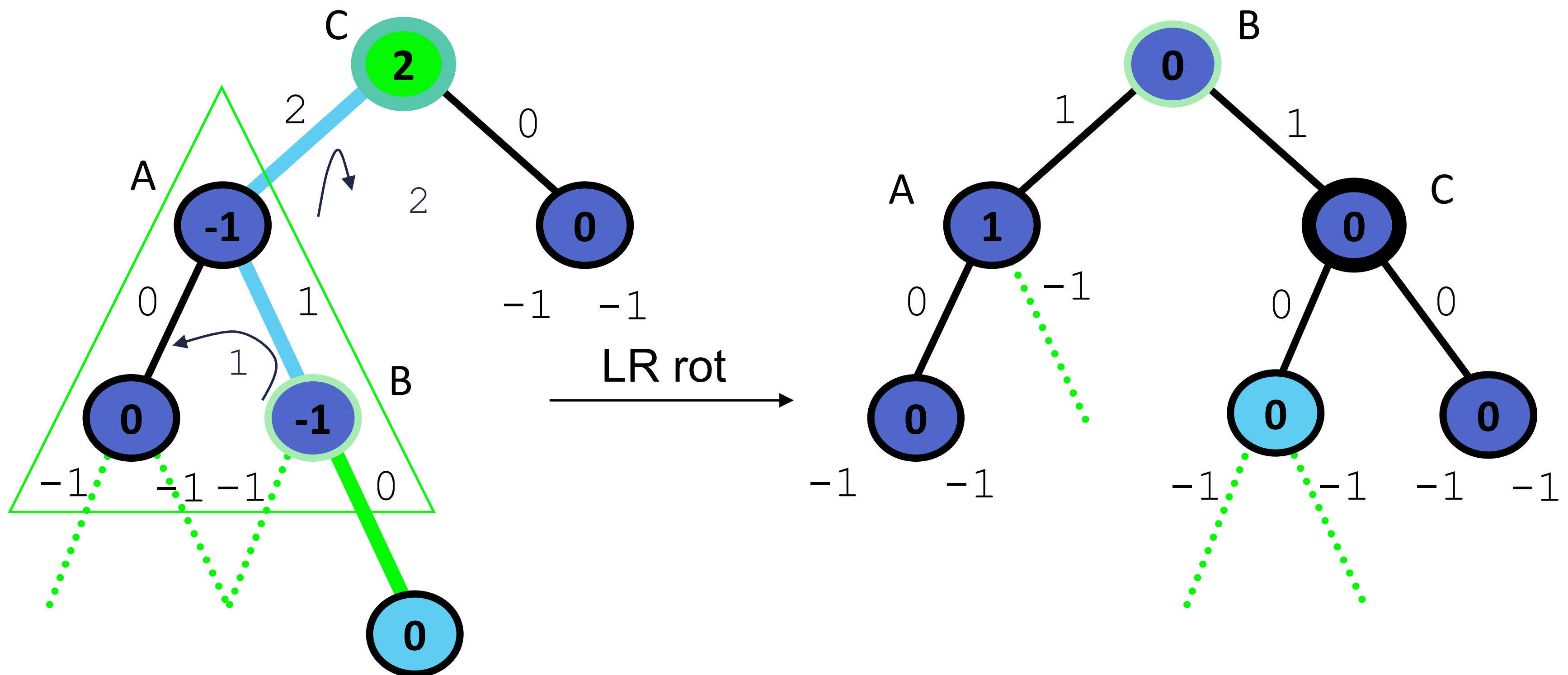
AVL strom - vložení uzlu doprava

b) Podstrom se přidáním uzlu doprava rozváží



AVL strom - pravá rotace

b) Vložen doleva – doprava => korekce LR rotací



Vkládání (Insert) do BVS bez vyvážení

```
void treeInsert( Tree t, Elem e )
{
   x = t.root;
   y = null;

  if( x == null ) t.root = e;       // single-leaf tree
  else {
    while(x != null) {        // find the parent leaf y
       y = x;
       if( e.key < x.key ) x = x.left
                      else x = x.right
    }
    // add e to parent y
     if( e.key < y.key )    y.left  = e
                     else  y.right = e
   }
}
```

Java-like pseudo code

Vkládání (Insert) do AVL s vyvážením

```
void avlTreeInsert( tree t, elem e )
{
   // 1. init
   // 2. find a place for insert
   // 3. if( already present )
   //          replace the node
   //    else
   //          insert new node
   // 4.balance the tree, if necessary
}
```

Java-like pseudo code

AVL Insert – proměnné & inicializace

```
avlTreeInsert( Tree t, Elem e )
{
   Node cur, fcur;   // current sub-tree and its father
   Node a, b;        // smallest unbalanced tree and its son
   Bool found;       // node with the same key as e found
   Node help;        // for search and new node
 1.init
   found = false;
   cur = t.root; fcur = null;
   a = cur, b = null;
 2. find the place for insert
   ...
```

Java-like pseudo code

AVL Insert – najdi místo pro vložení

```
...
2. find the place for insert

while(( cur != null ) and !found )
{
      if( e.key == cur.key ) found = true;
      else {
             if( e.key < cur.key )
                  help = cur.left;
             else help = cur.right;
             if(( help != null) and ( bal(help) != 0 )){
             //remember possible place for unbalance
                    a = help;
             }
             fcur = cur; cur = help;
      }
 } ...
```

AVL Insert – nahrazení nebo vložení

3. if(already present) replace the node value

```
if( found )
     setinfo( cur, e );    // replace the value
else {
    // insert new node to fcur
     help = leaf( e );     // cons ( e, null, null );
     if( fcur == null ) t.root = help;       // new root
     else {
            if( e.key < fcur.key )
                   fcur.left = help;
            else
                   fcur.right = help;
     }
   ...
```

AVL Insert – vyvážení podstromu

```
4.balance the tree, if necessary

    if( bal(a) == 2 )      {      // inserted left from 1
       b = a.left;
          if( b.key < e.key )     //and right from its son
                a.left = leftRotation( b ); // L rotation (LR)
          a = rightRotation( a );      // R rotation
    }
    else if( bal(a) == -2){       //inserted right from -1
      b = a.right;
      if( e.key < b.key )         // and left from its son
                a.right = rightRotation( b );// R rotation(RL)
      a = leftRotation( a );           // L rotation
     } // else tree remained balanced
  } // !found
}
```

AVL Insert – vyvažování podstromu

4. Shrnutí

a	b	Rotation
+	+	R rotation
+	–	LR rotation
–	+	RL rotation
–	–	L rotation

AVL - výška stromu

- Pro AVL strom S obsahující *n* uzlů platí:
- Výška (hloubka) stromu *h(S)* je maximálně o 45% větší ve srovnání s ideálně vyváženým stromem.

The End