Červeno-černý strom a B-strom

Karel Richta a kol.

Katedra počítačů
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

Datové struktury a algoritmy, B6B36DSA
02/2024, Lekce 11

https://moodle.fel.cvut.cz/course/view.php?id=5973

Obsah

- Červeno-černé stromy (Red-Black trees – RB)
- B-stromy (B-Trees)

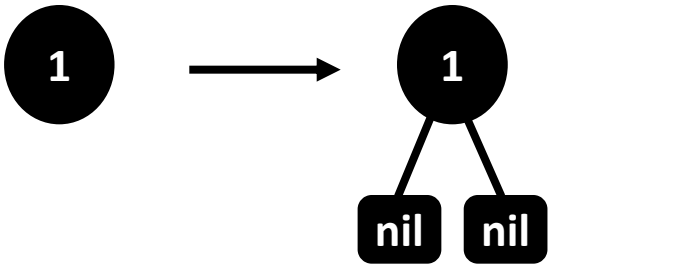
Založeno na:
[Cormen, Leiserson, Rivest: Introduction to Algorithms, Chapter 14 and 19, McGraw Hill, 1990]
[Whitney: CS660 Combinatorial Algorithms, San Diego State University, 1996]
[Frederic Maire: An Introduction to Btrees, Queensland University of Technology,1998]
http://artax.karlin.mff.cuni.cz/~martin/ds/main.pdf

Vlastnosti červeno-černých stromů

- Jedná se o přibližně vyvážené BVS – platí:

  $h_{RB} \leq 2x\ h_{BVS}$ (výška ≤ 2x výška perfektně vyváženého stromu)

- Každý uzel obsahuje navíc bit pro barvu {red | black}
- Listy jsou doplněny odkazem na **nil** (neexistující potomek) = ukazatelem na **nil** - původní listy se stanou vnitřními uzly.

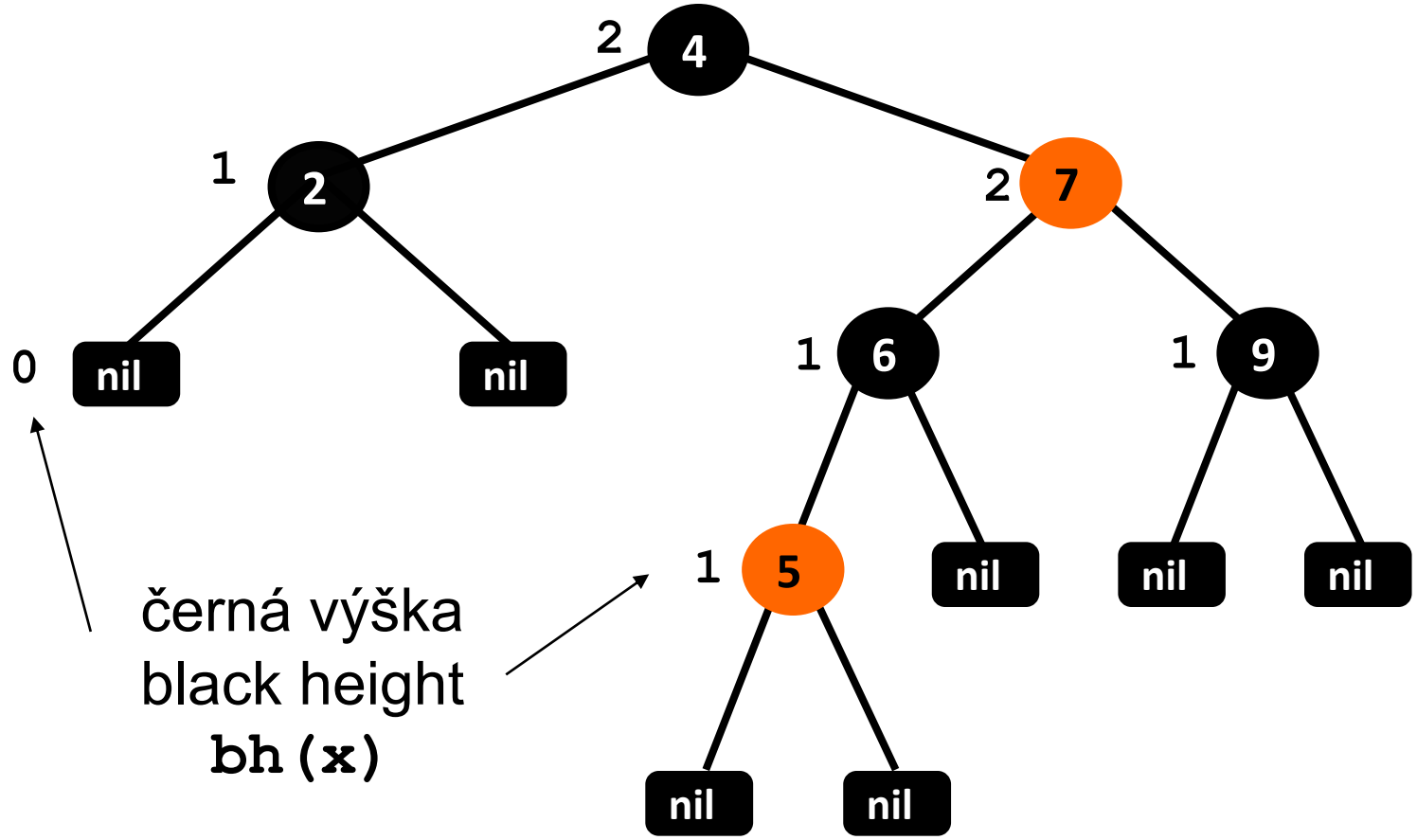


leaf ⟶ inner node

Černá výška v červeno-černých stromech

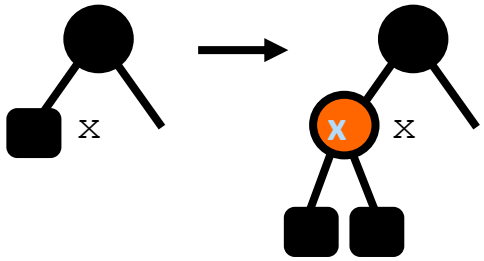
- Kořen RB-stromu je **černý**.
- Každá větev je zakončena (černým) uzlem **nil**.
- **Červený** uzel má oba potomky **černé**.
- **Černá výška** uzlu **x** (**black-height**) se značí **bh(x)** a je definována jako počet černých uzlů na libovolné cestě z **x** do listu (**x** se nepočítá). Všechny tyto cesty jsou stejně dlouhé. Černá výška má rozsah od **h/2** (kde **h** je výška stromu), jestliže polovina uzlů je červených do **h**, pokud jsou všechny uzly černé.
- **Výška h(x)** stromu s kořenem v **x** je maximálně dvakrát větší, než výška optimálně vyváženého stromu.
- $h \leq 2\lg(n+1)$ .... $h \in \Theta(\lg(n))$
- **bh(x)** je v rozsahu od $\lg(n+1)$ do $2\lg(n+1)$

Příklad černé výšky



Operace INSERT pro RB-stromy

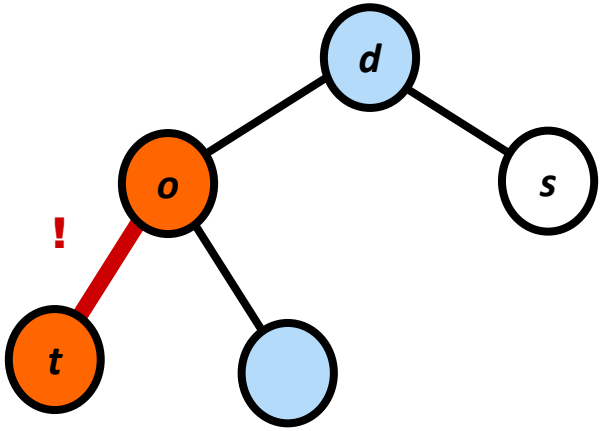
1) Nový uzel bude červený.
2) Vložíme uzel do stromu jako do standardního BVS.
3) Jestliže je předek černý, jsme hotovi → strom je Červeno-Černý.



4) Jestliže nikoliv, mohou nastat 3 následující případy.

Poruchy při vkládání

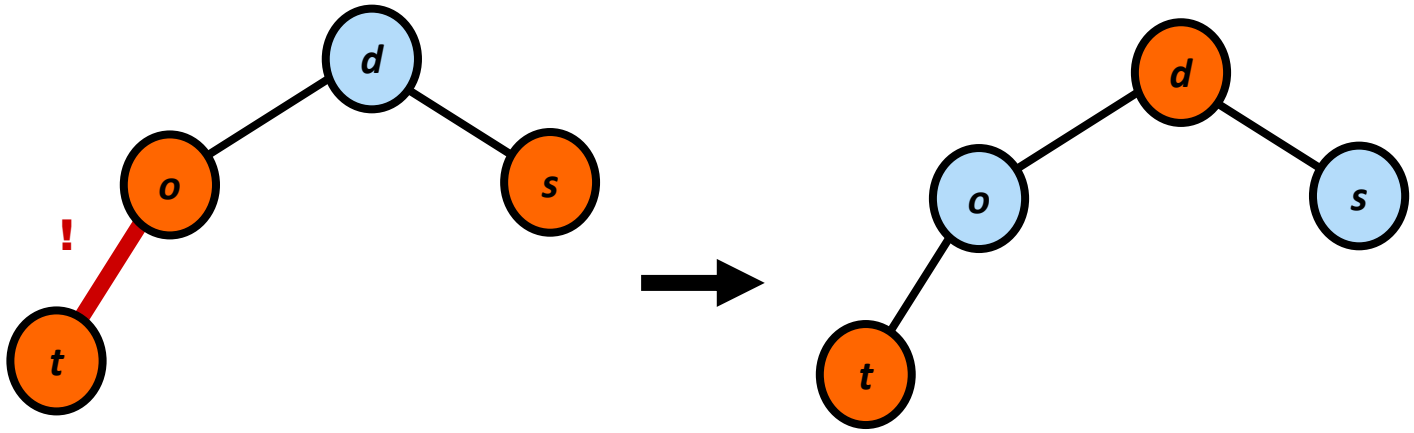
- Pokud je vrchol *t* červený a jeho otec je také červený, pak řekneme, že vložením *t* nastala porucha.
- Pokud nastala porucha, pak ji musíme nějak opravit. Situace je na obrázku - nejprve záleží na tom, jakou barvu má *s*, strýc *t*:



Poruchy při vkládání (2)

1. *s* je červený. Pak pouze přebarvíme *o*, *d* a *s* podle obrázku.

Nyní *d* může být porucha, ovšem posunutá o 2 hladiny výše.

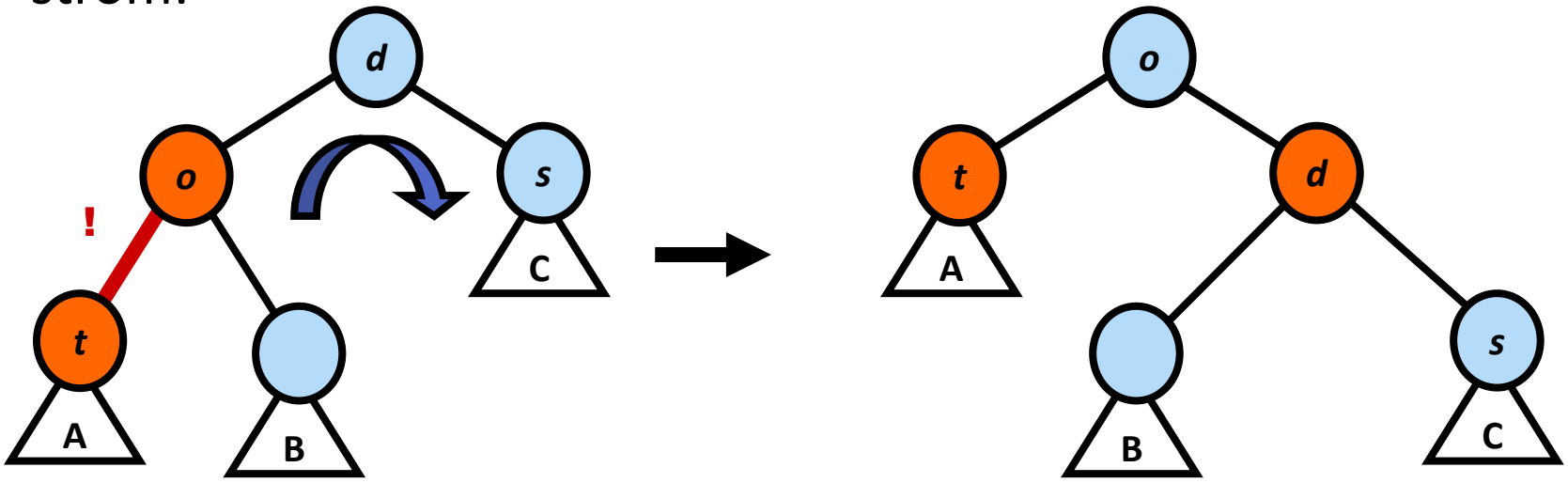


Nakonec je ještě nutné přebarvit kořen stromu na černo.

Poruchy při vkládání (3)

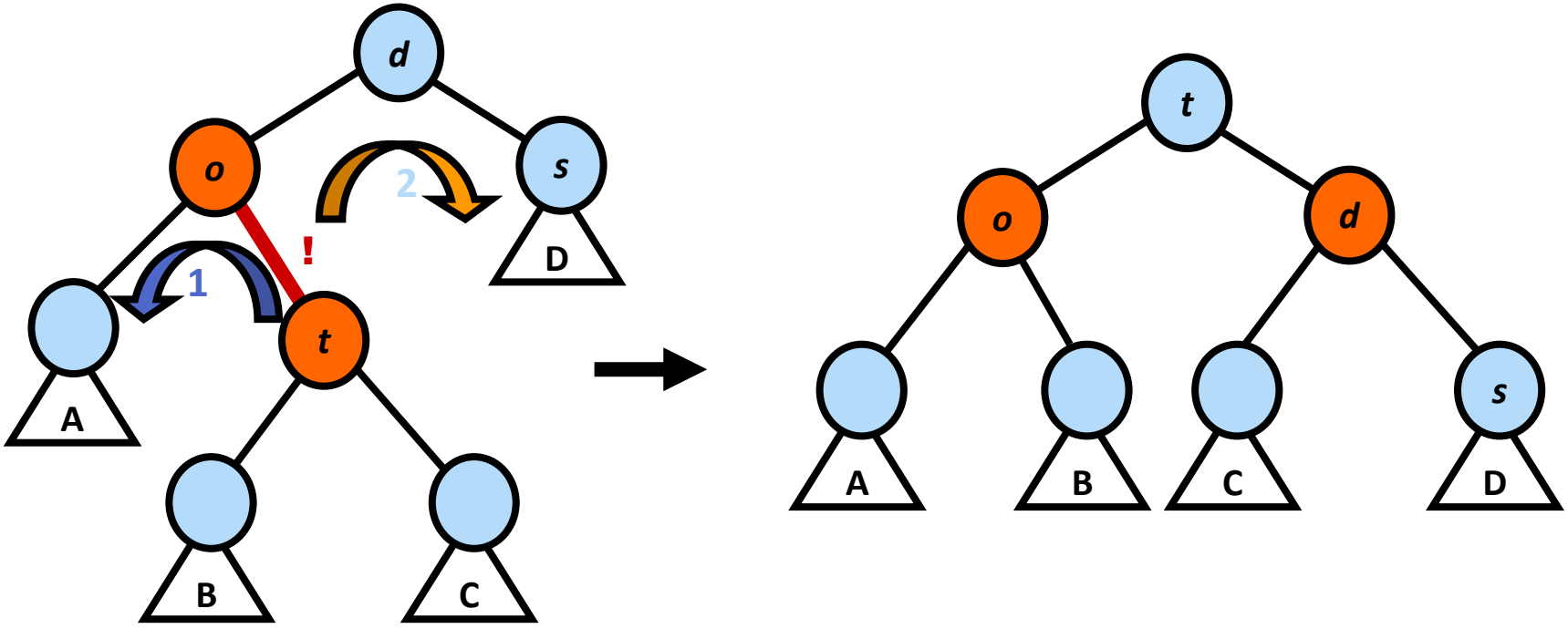
2. *s* je **černý**. Pak záleží na tom, zda hodnota *t* leží mezi hodnotami *o* a *d* nebo ne. Jinými slovy, zda cesta *t*-*o*-*d* obsahuje zatáčku.

(a) Bez zatáčky: Provedeme rotaci a přebarvíme podle obrázku. Splněny budou podmínky 1, 2 i 3, tedy máme červeno-černý strom:



Poruchy při vkládání (4)

(b) Se zatáčkou. Provedeme dvojitou (*LR*) rotaci a přebarvíme podle obrázku. Splněny budou podmínky 1, 2 i 3, opět máme rovnou červeno-černý strom.



Vkládání (Insert) v RB-stromech

- Časová složitost je O(log(n)).
- Vyžaduje maximálně dvě rotace.

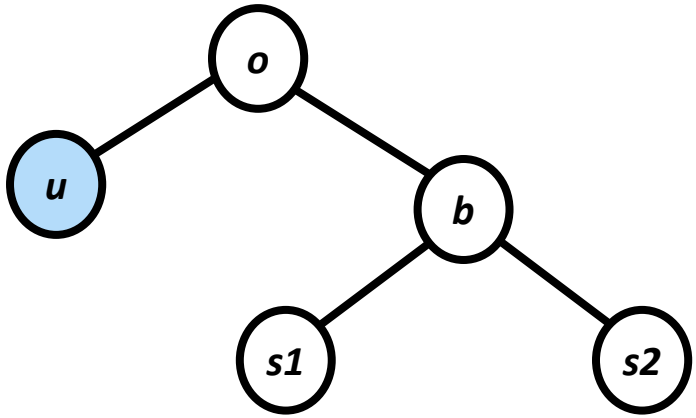
- DEMO:
- https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/RedBlack.html
- (Intuitivní, dobré pro porozumění)
- http://www.youtube.com/watch?v=vDHFF4wjWYU

Operace DELETE pro RB-stromy

- Zatímco INSERT se příliš nelišil od své obdoby u AVL stromů, operace DELETE u červeno-černých stromů je oproti AVL stromům složitější mentálně, ovšem jednodušší časově.
- Situace: odstraňujeme vrchol *t* a jeho syna, který je list.
- Druhého syna *t*, *u*, dáme na místo smazaného *t* a začerníme ho. Tím máme splněny podmínky 1 a 2. Pokud byl ale *t* **černý**, chybí nám na cestách procházejících nyní *u* jeden černý vrchol.

Poruchy při mazání

Situace: máme červeno-černý strom, *u* je porucha s otcem *o*, bratrem *b* a synovci *s1*, *s2*, viz obrázek.

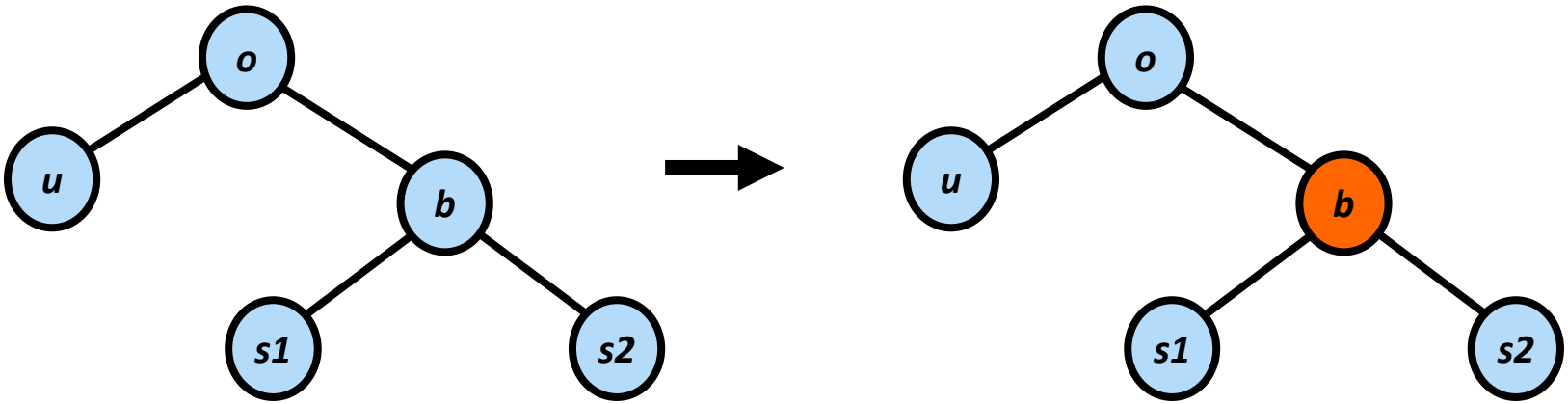


Oprava záleží na ***barvě bratra*** (*b*):

Poruchy při mazání (2)

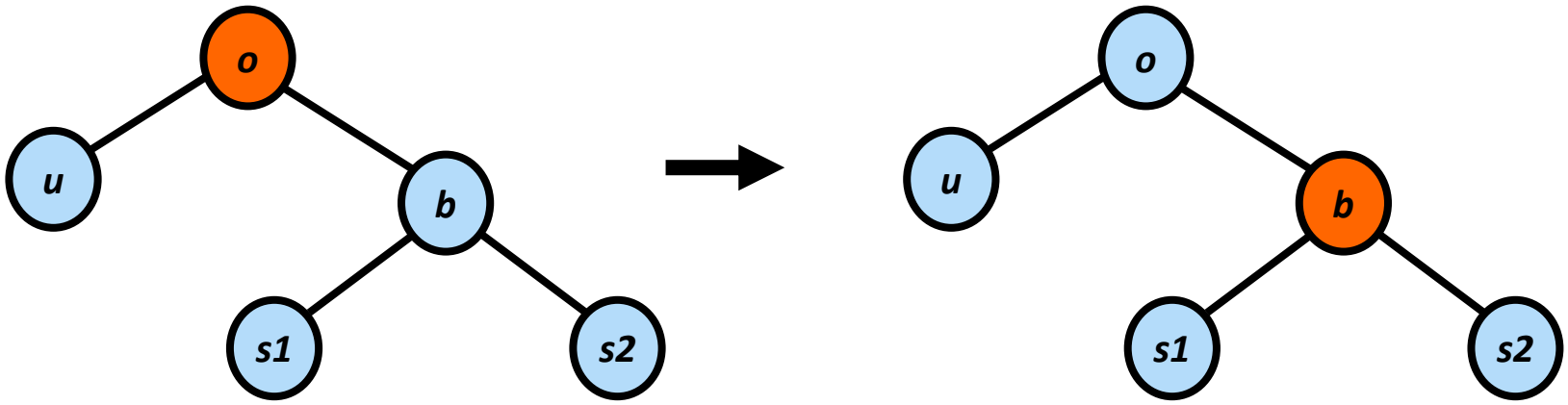
1. Bratr je **černý**. Rozlišujeme dále 4 případy, z nichž jeden způsobí poruchu o hladinu výše a ostatní skončí s červeno-černým stromem.

(a) Otec i synovci jsou **černí**. Přebarvíme *b* na červeno, viz obrázek, a tady porucha je o hladinu výše – provedli jsme tedy jakousi částečnou opravu.



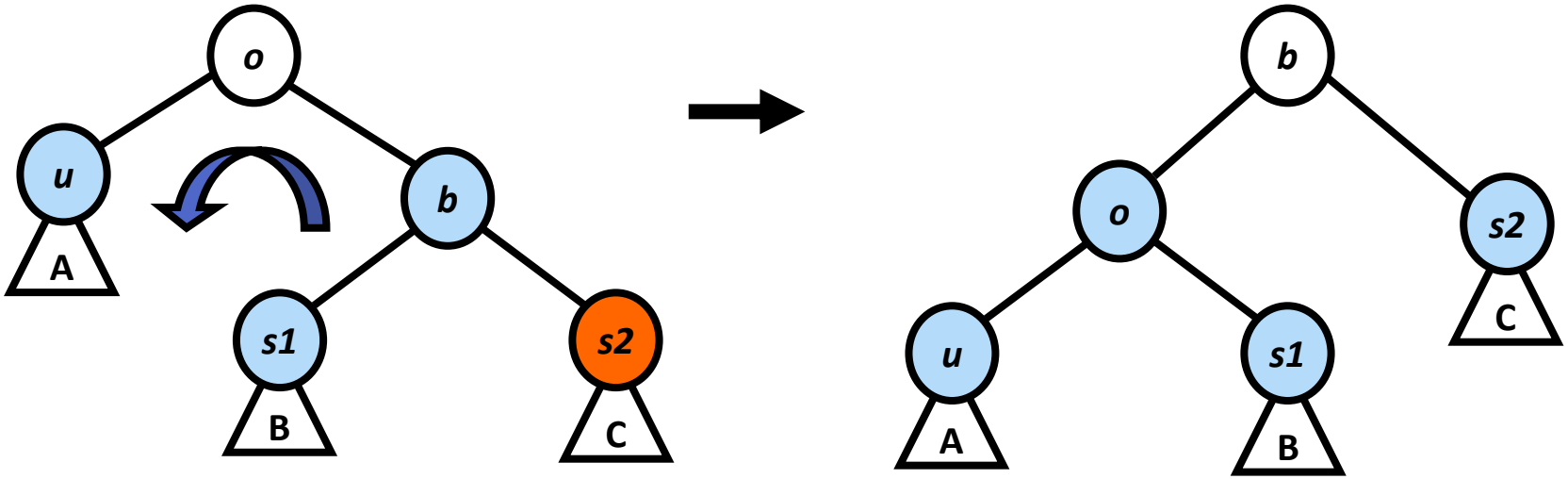
Poruchy při mazání (3)

(b) Otec je **červený**, synovci **černí**. Přebarvíme otce a bratra podle obrázku a dostáváme červeno-černý strom.



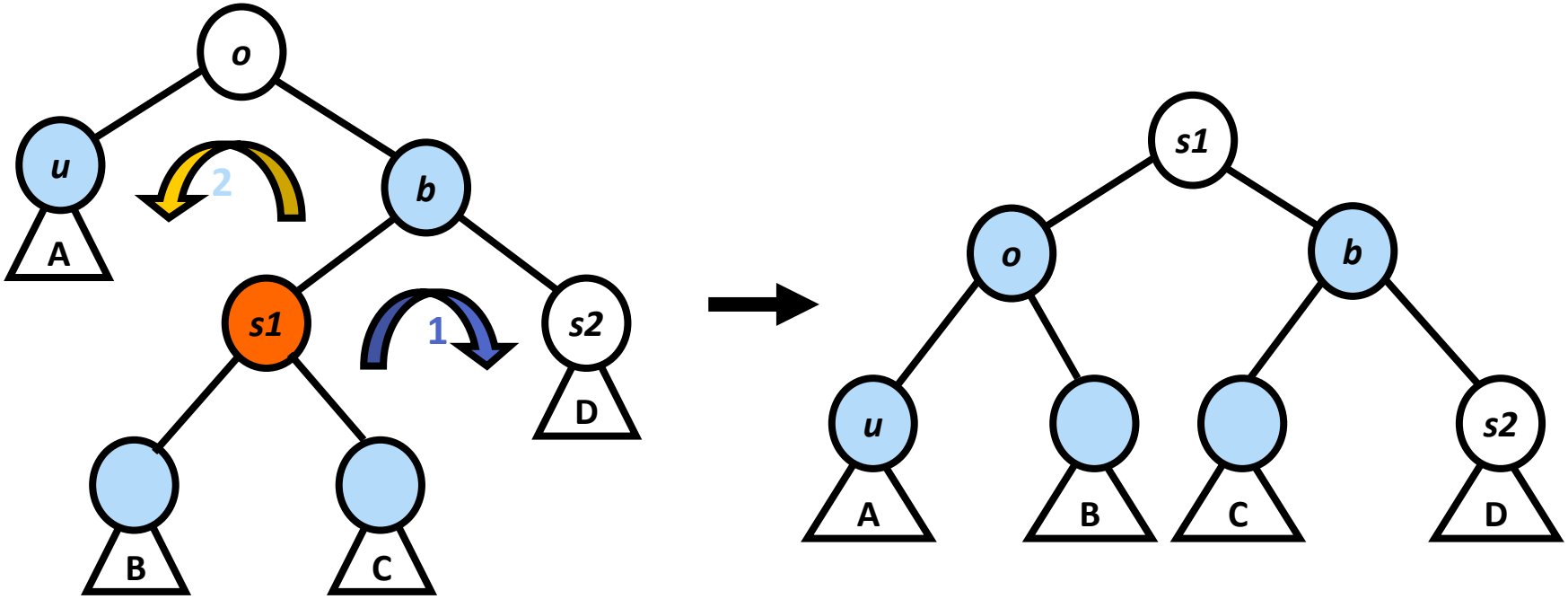
Poruchy při mazání (4)

(c) Synovec *s1*, jehož hodnota leží mezi hodnotami otce a bratra, je **černý**, druhý synovec je **červený**. Přebarvíme a rotujeme podle obrázku, barva otce se nemění (tj., vrchol *b* bude mít barvu, kterou původně měl vrchol *o*). Dostáváme červeno-černý strom.



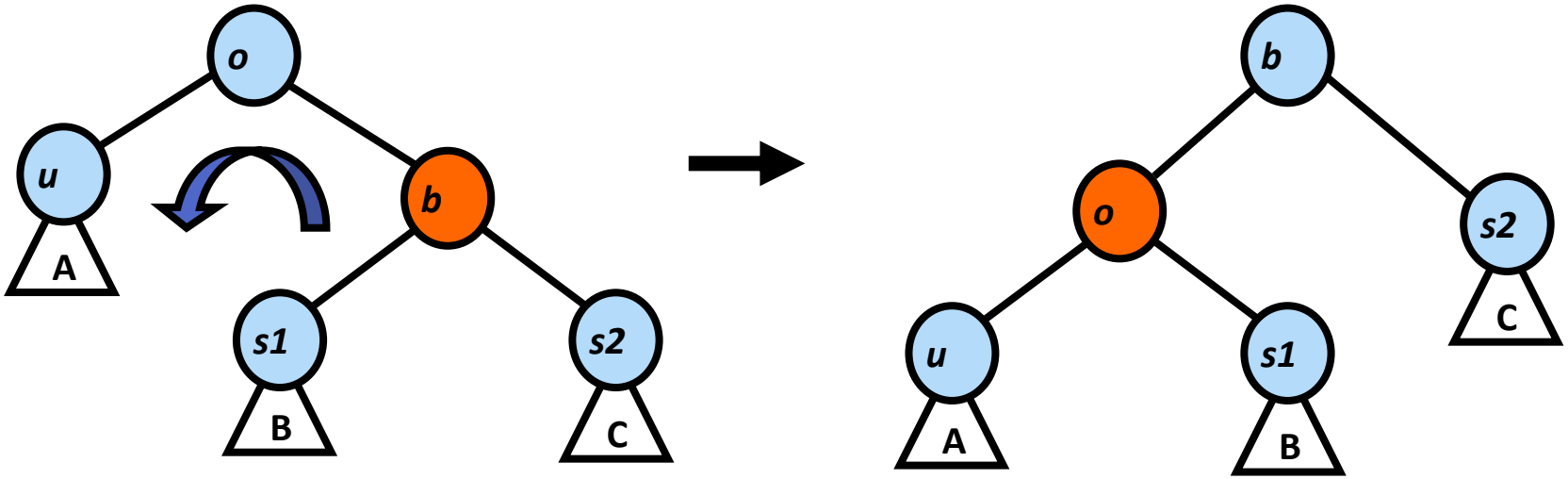
Poruchy při mazání (5)

(d) Synovec *s1*, jehož hodnota leží mezi hodnotami otce a bratra, je **červený**, druhý synovec má libovolnou barvu. Přebarvíme a *RL* rotací upravíme podle obrázku (tj. vrchol *s1* bude mít barvu, kterou měl původně vrchol *o* a barva vrcholu *s2* se nezmění). Dostáváme červeno-černý strom.



Poruchy při mazání (6)

2. Bratr je **červený**. Přebarvíme a rotujeme podle obrázku. Dostáváme červeno-černý strom s poruchou, přičemž porucha je o hladinu níže. I když to tak na první pohled nevypadá, máme vyhráno, protože bratr poruchy je **černý** a otec **červený**, tedy příští oprava bude případ 1b, 1c, nebo 1d a skončíme s červeno-černým stromem.



Mazání v RB-stromu

- Časová složitost je O(log(n)).
- Jsou zapotřebí maximálně tři rotace.

Důkaz výšky RB-stromu

Věta: RB-strom s *n* interními uzly má výšku *h* nejvýše 2lg(*n*+1).

Důkaz:

- Ukažme, že podstrom s kořenem v *x* obsahuje nejméně $2^{bh(x)}-1$ *interních uzlů*. Indukcí dle výšky podstromu s kořenem v *x*:
  - Pokud je *x* list, pak bh(*x*) = 0, $2^{bh(x)}-1 = 0$ interních uzlů (uzel **nil**).
  - Předpokládejme, že výška *x* je *h*, potomci *x* mají výšku *h* -1:
    - černá výška potomků *x* je buď bh(*x*)-1 nebo bh(*x*) (podle barvy),
    - indukční předpoklad je, že potomci *x* mají nejméně $(2^{bh(x)-1})-1$ interních uzlů,
    - pak podstrom s kořenem v *x* obsahuje nejméně:
      $$2^{bh(x)-1} -1 + 2^{bh(x)-1} -1 + 1 = 2^{bh(x)} - 1$$ interních uzlů.
  - Nechť *h* je výška stromu, který rotujeme v *x*:
    - bh(*x*) ≥ *h* / 2 (max ½ je červených),
    - pak $n \geq 2h/2 - 1 \Leftrightarrow n + 1 \geq 2h/2 \Leftrightarrow \lg(n+1) \geq h / 2$ a
    - $h \leq 2\lg(n+1)$.

Zhodnocení pro RB-stromy

- Pro binární vyhledávací červeno-černé stromy lze implementovat SEARCH, INSERT a DELETE tak, že vyžadují čas O(log n) a INSERT používá nejvýše jednu (dvojitou) rotaci a DELETE používá nejvýše dvě rotace nebo rotaci a dvojitou rotaci.
- RB-stromy jsou lepší než AVL stromy, které pro DELETE potřebují až log n rotací. Oproti váhově vyváženým stromům i proti AVL stromům jsou červeno-černé stromy sice jen konstantně lepší, ale i to je dobré.
- Při použití binárních vyhledávacích stromů ve výpočetní geometrii nese informaci i rozložení prvků ve stromě, a tato informace se musí po provedení rotace nebo dvojité rotace aktualizovat. To znamená prohledání celého stromu a tedy čas O(n) za každou rotaci a dvojitou rotaci navíc.
- Pro tyto problémy jsou červeno-černé stromy obzvláště vhodné, protože minimalizují počet použitých rotací a dvojitých rotací.

B-stromy (B-trees)

1. Motivace
2. Vícecestné vyhledávací stromy (multiway search trees)
3. Definice B-stromu
4. Search
5. Insert
6. Delete (jen přehledově...)

Motivace pro B-stromy

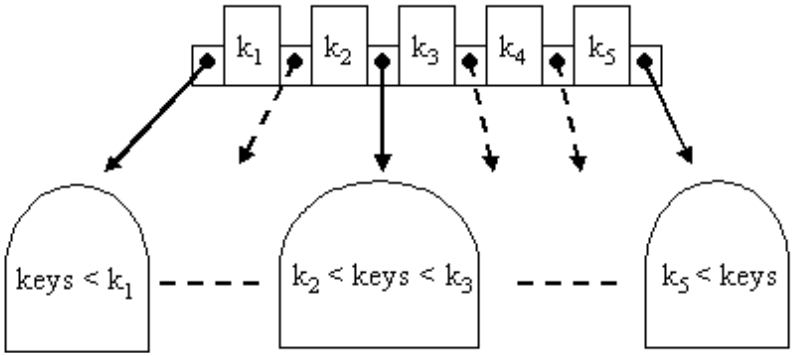
- Velká data se nevejdou do operační paměti -> používáme disky (vnější paměti s přímým přístupem).
- Čas přístupu na disk je určen HW a OS.
- Přístup na disk je MNOHEM pomalejší, v porovnání s přístupem do operační paměti:
  - 1 diskový přístup ~ 13 000 000 instrukcí!!!!
  - Počet diskových operací dominuje v odhadu časové náročnosti.
- Přístup na disk = Disk-Read, Disk-Write
  - Disk je rozdělen do bloků (512, 2048, 4096, 8192 bytes), které se přenášejí jako celek.
  - Proto se může hodit návrh vícecestných vyhledávacích stromů (*multiway search trees*), kde každý uzel stromu „pasuje“ do jednoho bloku na disku.

DISK : 16 ms
Seek 8ms + rotational delay 7200rpm 8ms

Instruction:
800 MHz 1,25ns

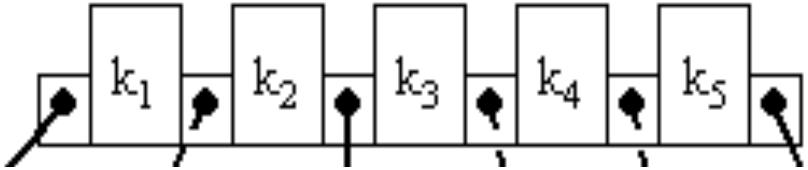
Vícecestné vyhledávací stromy

- Zobecnění binárních vyhledávacích stromů, kde počet následníků byl m=2.
- Každý uzel vícecestného stromu má nejvýše m potomků (m>2).
- Interní uzly obsahující n klíčů mají n+1 následníků, $n < m$ (výjimkou může být kořen stromu).
- Listy nemají následníky.
- Strom je uspořádán.
- Klíče v uzlech vymezují intervaly v podstromech - viz obrázek:



Listy vícecestného vyhledávacího stromu

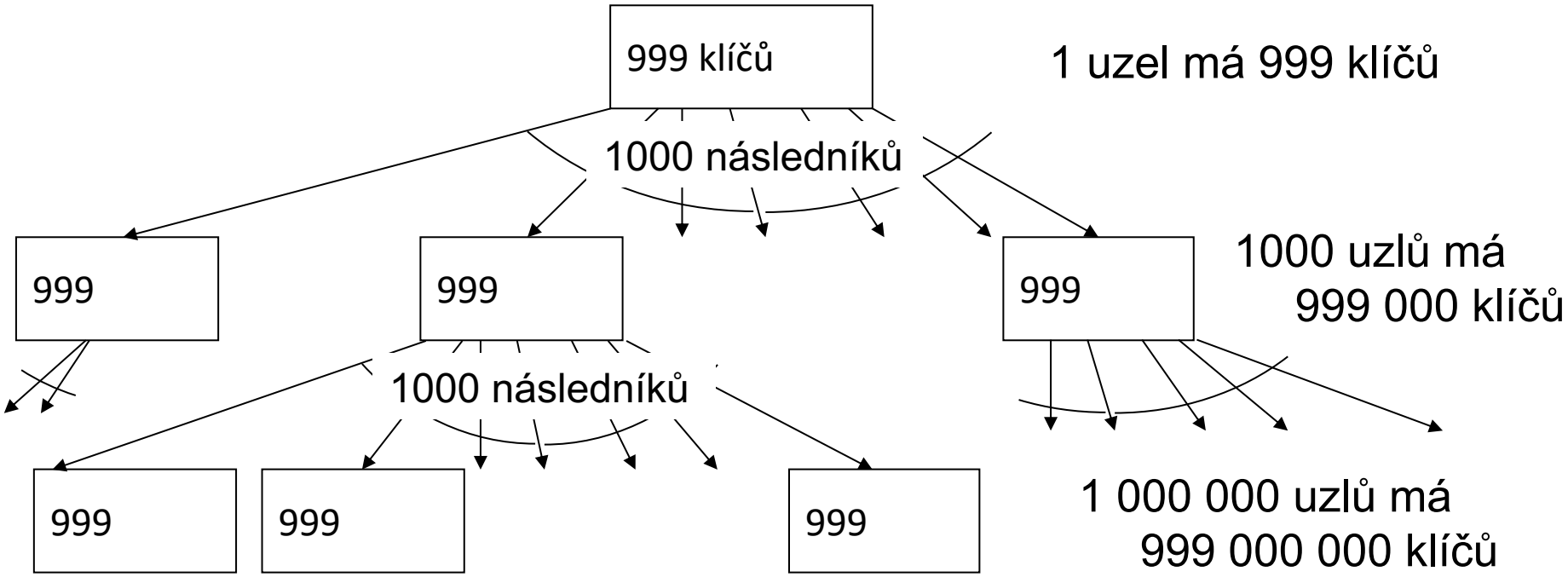
- Listy vícecestného vyhledávacího stromu nemají žádné následníky a neobsahují žádné ukazatele na podstromy. Obvykle obsahují vlastní hodnoty.
- Platí: $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_5$



B-stromy (B-trees)

- **B-strom** je vícecestný vyhledávací strom minimálního stupně *t*, který splňuje další podmínky:
- Všechny listy mají stejnou výšku (B-strom je vyvážený).
- Kořen může mít 0 až 2*t* potomků (max 2t-1 klíčů)
- Pro všechny ostatní uzly platí:
  - mají nejméně: *t-1* klíčů (vnitřní uzly, krom kořene, *t* potomků)
  - mají nejvýše: *2t-1* klíčů (vnitřní uzly *2t* potomků).

Příklad B-stromu



B-strom minimálního stupně $t = 500$, výšky 2 obsahuje maximálně

1 001 001 uzlů (1+1000 + 1 000 000)

999 999 999 klíčů ~ 1 miliarda klíčů

Obsah uzlů B-stromu

- n … počet klíčů k_i uložených v uzlu.
- Uzel, kde $n = 2t-1$ se nazývá **plný uzel** (**full-node**).
- k_i … n klíčů, uložených v neklesajícím pořadí
- $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_n$
- *list* … booleovská hodnota, `true` pro list, `false` pro ostatní.
- c_i … $n+1$ ukazatelů na následníky (nedefinováno pro listy).
- Pro klíče k_i v podstromech platí:
- $keys_1 \leq k_1 \leq keys_2 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_n \leq keys_{n+1}$

Hledání v B-stromech

- Obdobné hledání v BVS.
- V rámci uzlů se hledá sekvenčně, nebo binárně.

- Vstup: ukazatel na kořen stromu a klíč *k*
- Výstup: uspořádaná dvojice (*y, i*), kde *y* je uzel a *i* je index v rámci uzlu takový, že *y.k*[*i*] = *k* nebo hodnota NIL, pokud klíč *k* nebyl nalezen.

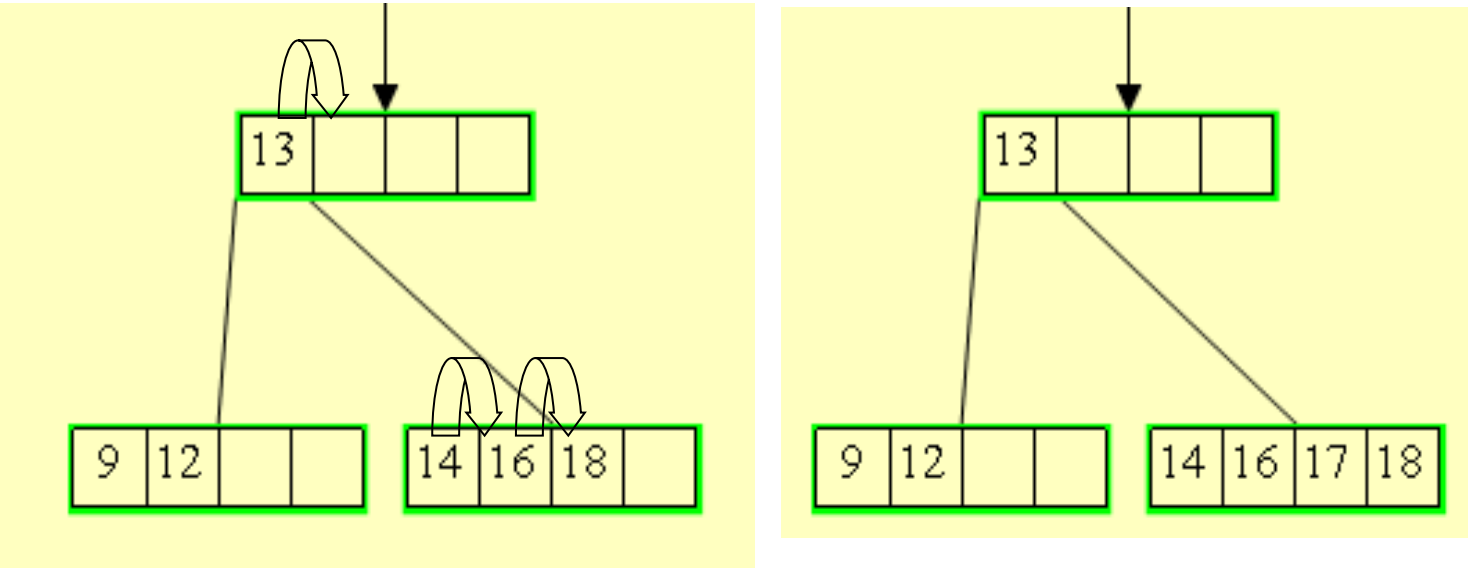
Operační složitost hledání v B-stromu

- Počet čtení z disku:
- $O(h) = O(\log_t n)$
- kde h je výška stromu a t je minimální stupeň stromu a n je počet uzlů stromu.
- Protože počet klíčů je $x.n < 2t$, celá smyčka má horní odhad $O(t)$ a celková časová složitost je $O(t \log_t n)$.

B-stromy: insert - 1. vícefázová strategie

Insert do uzlu, který není zcela naplněn (**not full** node)

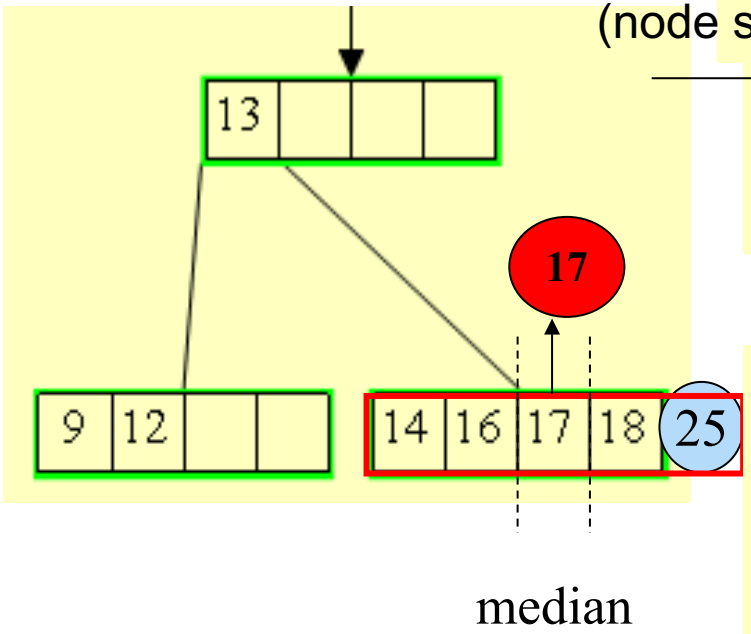
- Insert 17



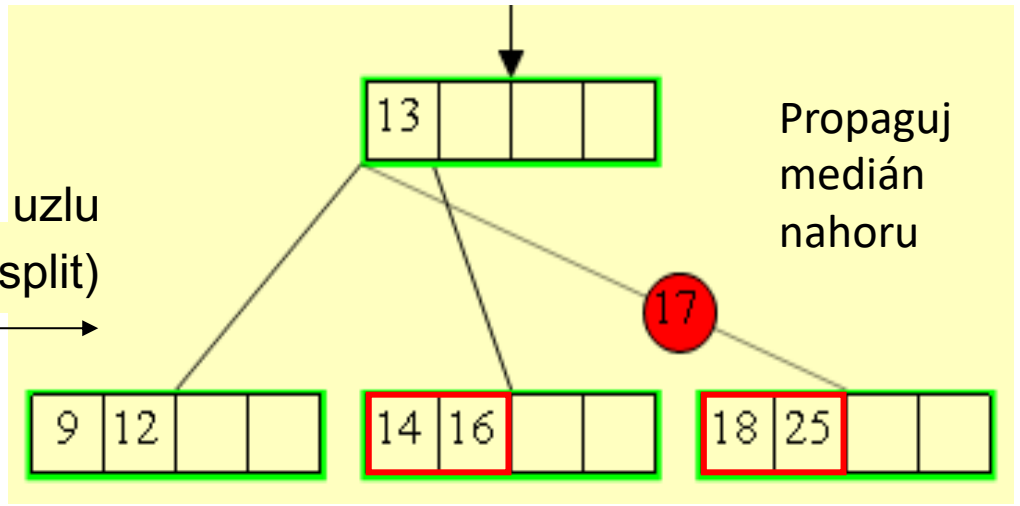
B-stromy: insert - 1. vícefázová strategie

Insert do „**plného uzlu**“

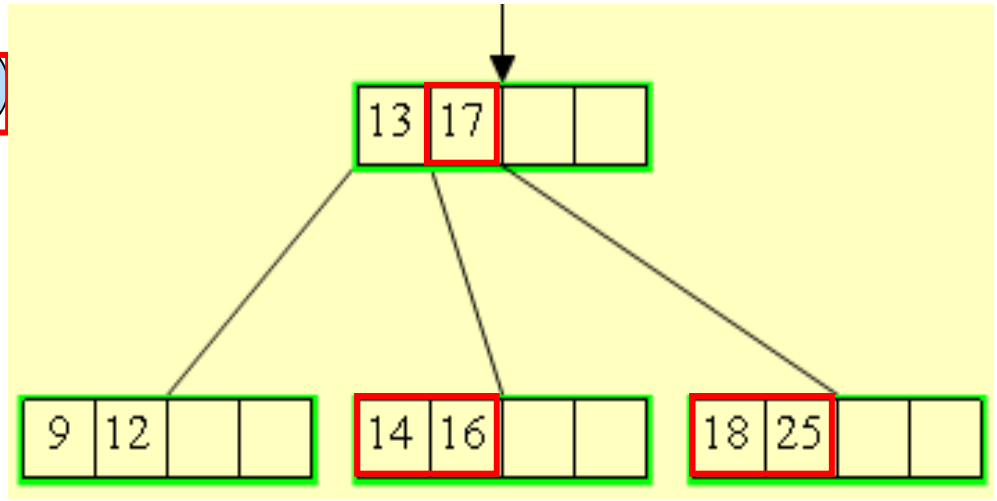
- Insert 25



Dělení uzlu
(node split)



Propaguj
medián
nahoru



1.Vícefázová strategie:
“řeš problém, až když se vyskytne”

B-stromy: insert - 1. vícefázová strategie

Insert (x, T) - pseudokód

- Najdi list pro *x*
- Pokud uzel není plný, insert *x* a konec
- **while** (je aktuální uzel plný)
- najdi medián (z klíčů po vložení x)
- rozděl uzel (split node) do dvou uzlů
- propaguj medián směrem nahoru
- aktuální uzel = rodič aktuálního uzlu

Fáze top-down

(node overflow)

Fáze bottom-up

B-stromy: insert - 2. jednofázová strategie

Princip: “řeš problémy, než nastanou”

Pouze fáze top-down

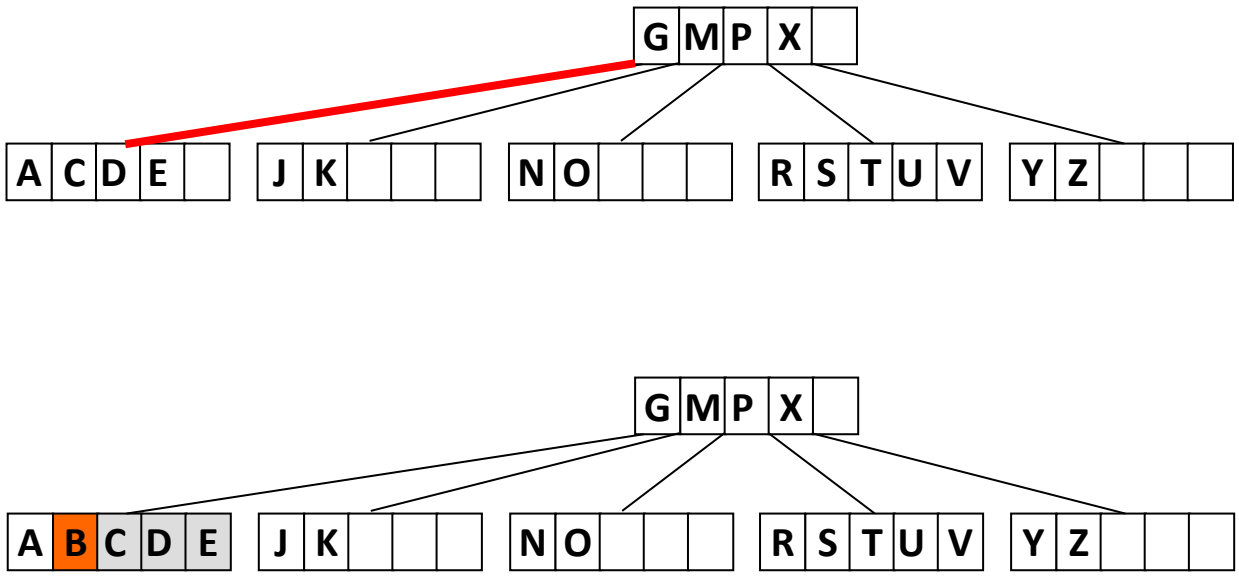
- Rozděl před vstupem naplněný uzel.
- Tím si vytvoříš prostor pro budoucí medián z potomků.
- Fáze „bottom-up“ není zapotřebí.

- Rozdělení:
  - kořen => strom naroste o úroveň,
  - vnitřní uzel nebo list => rodič obdrží klíč, který je medián

B-stromy: insert - 2.jednofázová strategie

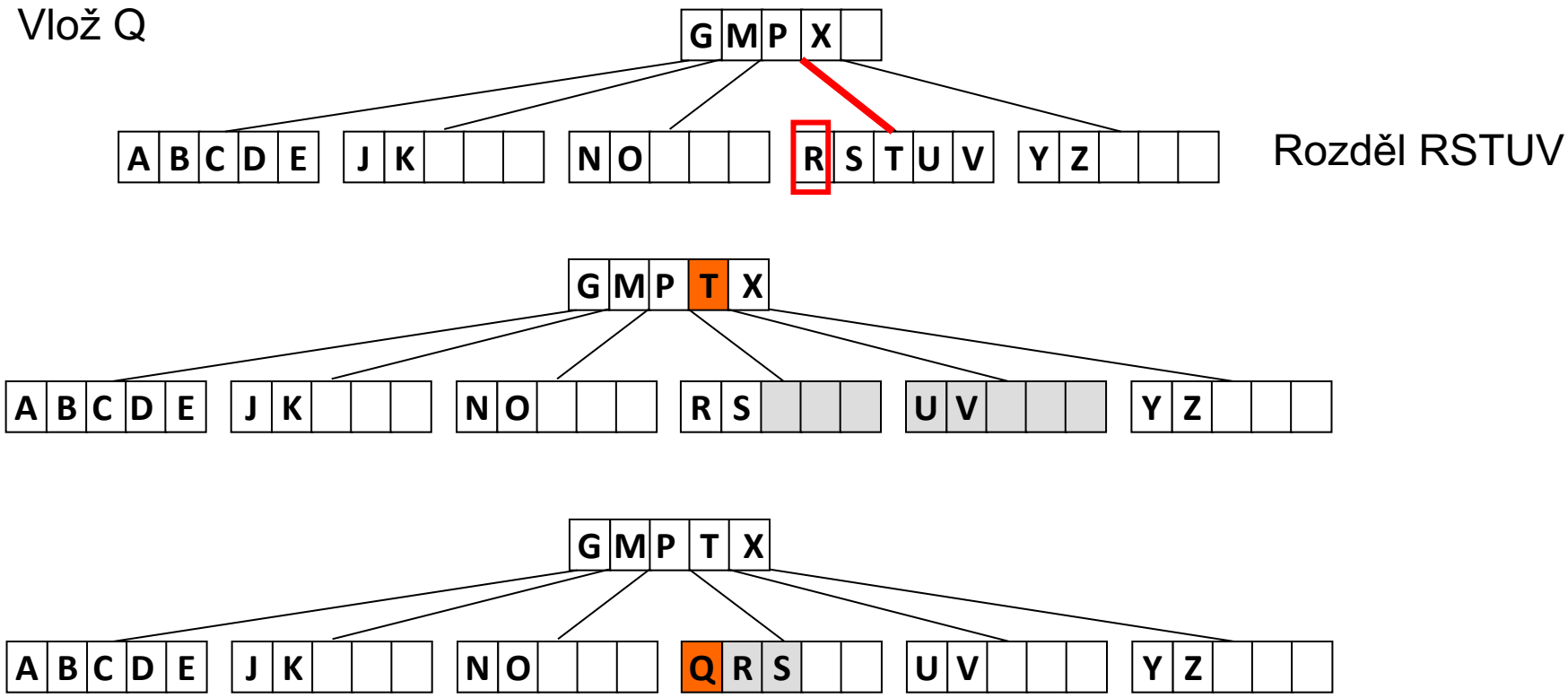
Insert do nenaplněného uzlu (**not full**)

Vlož B



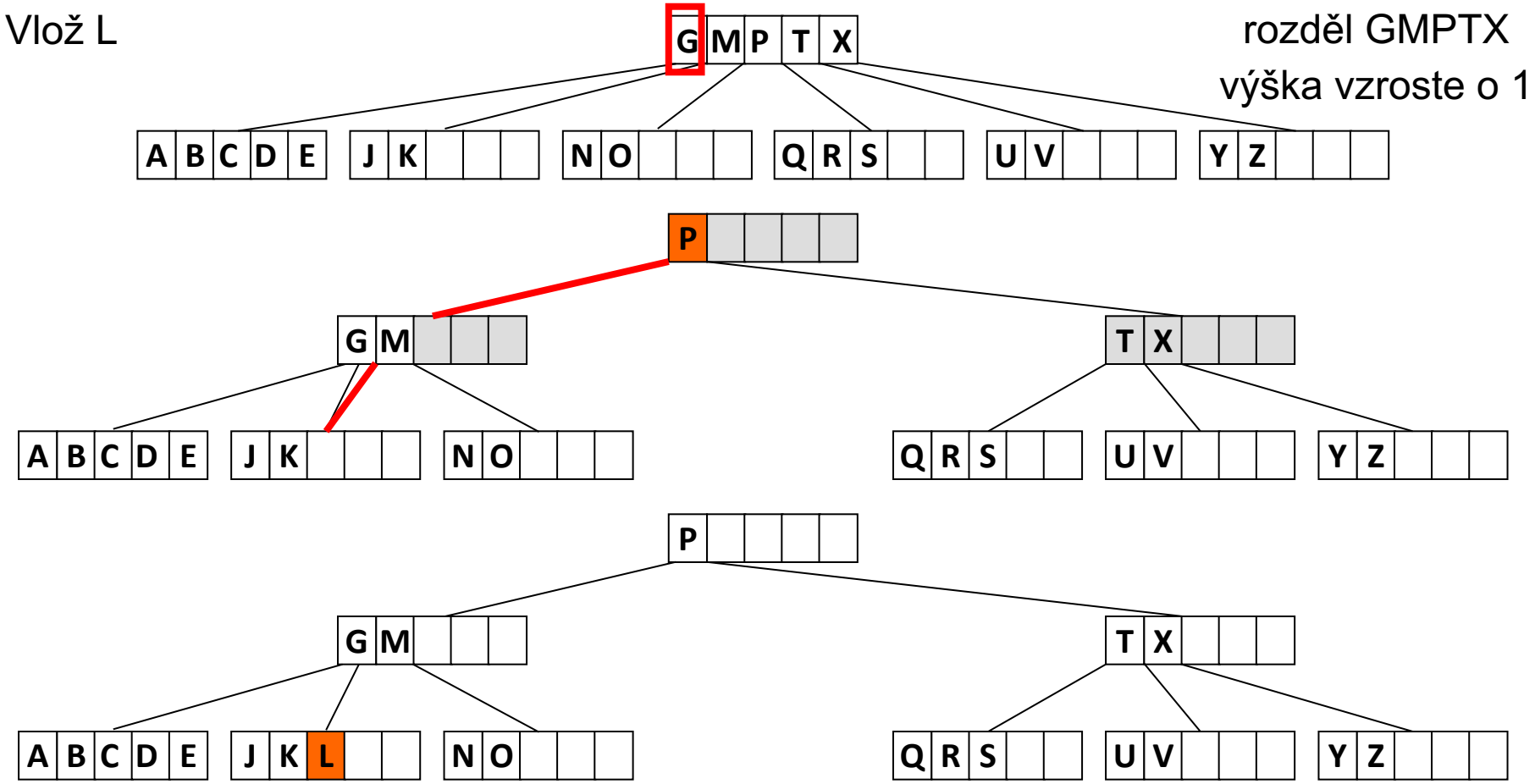
B-stromy: insert - 2.jednofázová strategie

Přeskok „**full node**“ a vložení do „**not full**“

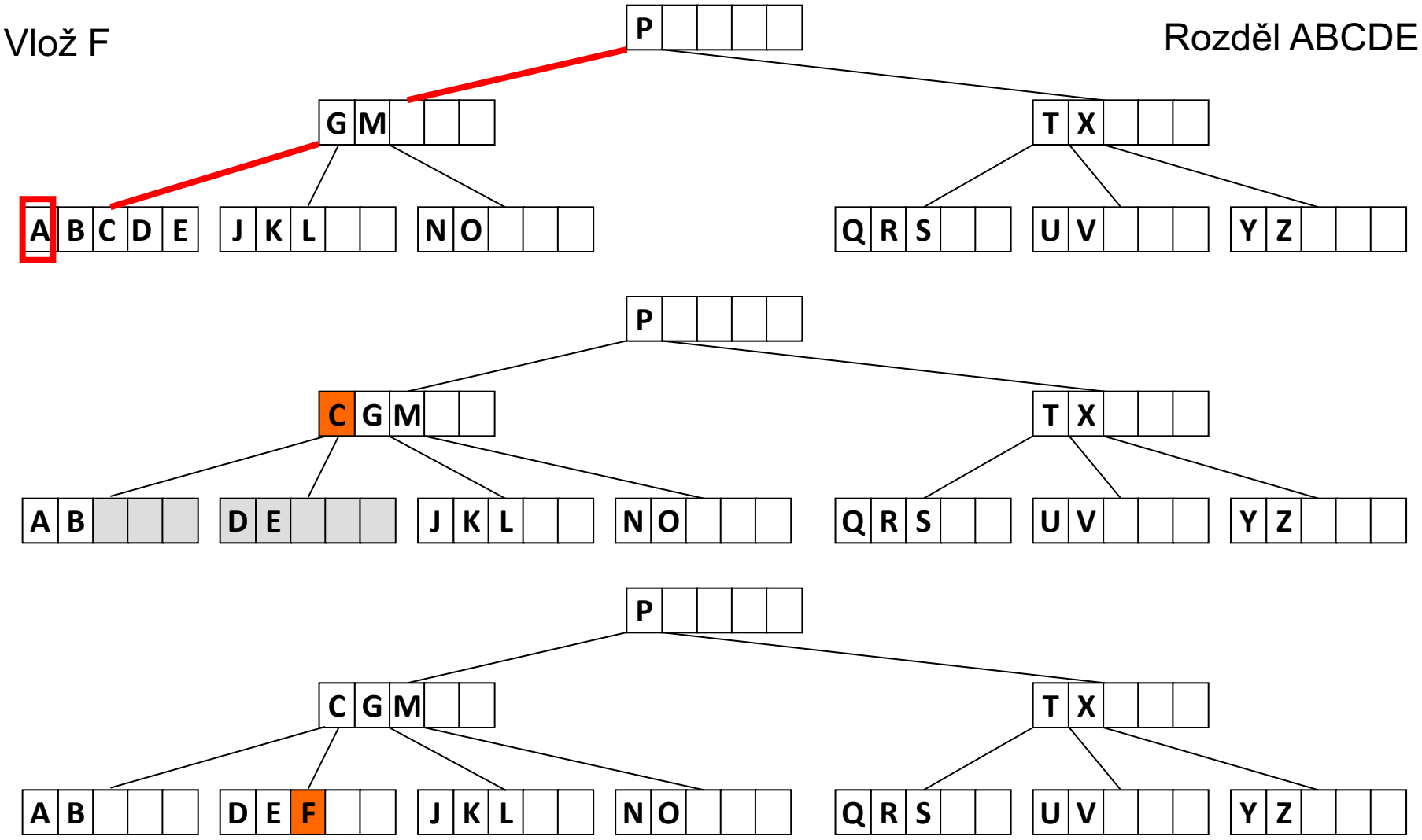


B-stromy: insert - 2.jednofázová strategie

Ignorování „**full node**“ a vložení do „**not full**“ uzlu



B-stromy: insert - 2.jednofázová strategie



B-stromy: insert - 2.jednofázová strategie

Insert (x, T) - pseudokód

- While hledej listy *x*
- if (je uzel plný)
- najdi medián (mezi klíči naplněného uzlu)
- rozděl (split) uzel na dva
- vlož (insert) medián do rodiče (parent).
- Insert *x* a zastav.

Pouze fáze top-down

Strategie pro úpravy B-stromu

Dvě principiální strategie

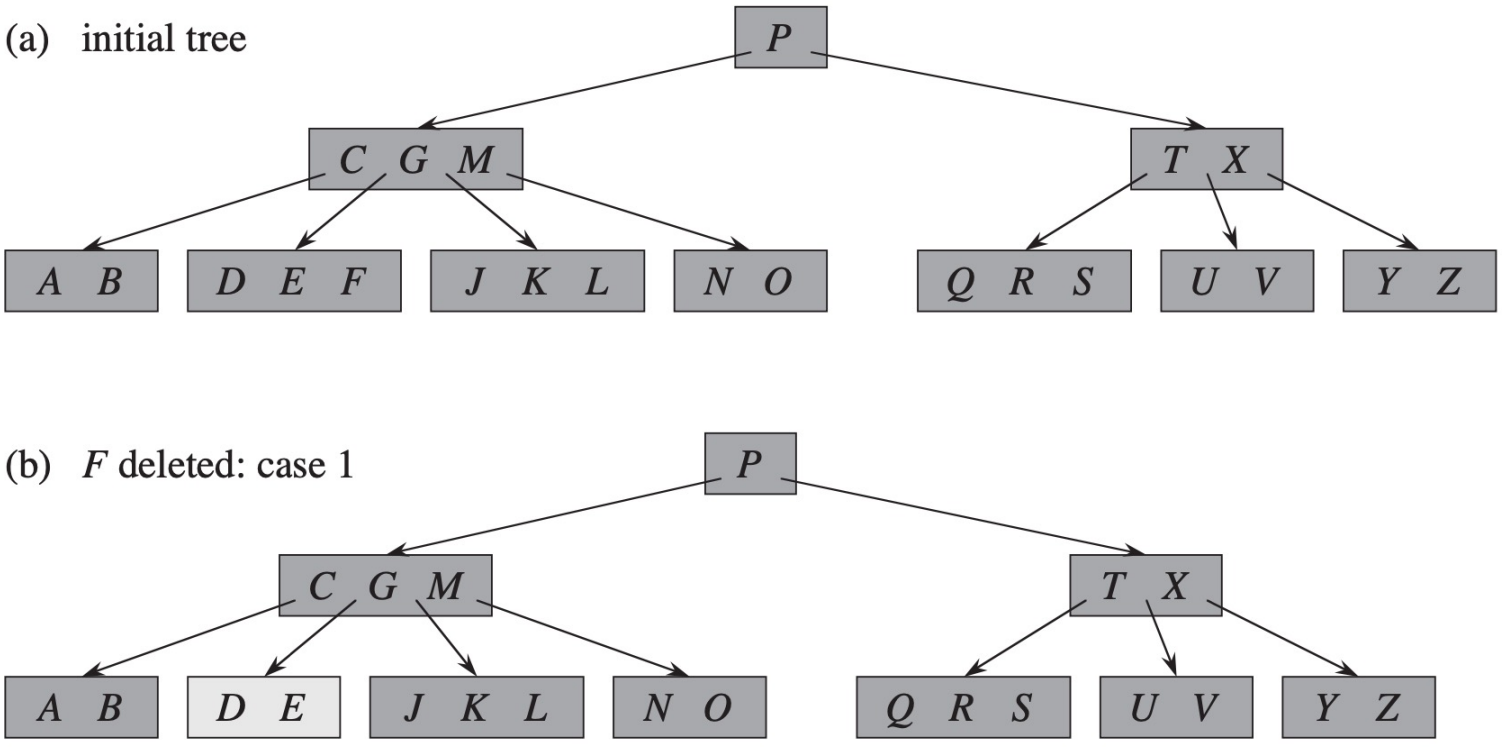
1. Více-fázová strategie:
- “řeš problém, až když se vyskytne”
2. Jedno-fázová strategie: [Cormen]
- “řeš problémy, než nastanou”
- Akce:
- Rozděl plné uzly
- Sluč uzly, které mají minimální obsah (méně než minimum položek).

Delete pro B-stromy

Delete (x, T) - principy

- Při průchodu opravujeme uzly, které mají minimální počet klíčů (*t-1*)
- Pokud mají oba potomci jen *t-1* klíčů => operace *merge*: opačná operace k *split*
- Pokud jen jeden => přesun předchůdce/následníka do rodiče
- Pokud kořen nemá žádný klíč, zrušíme jej a nahradíme jeho jediným potomkem => snížení výšky stromu

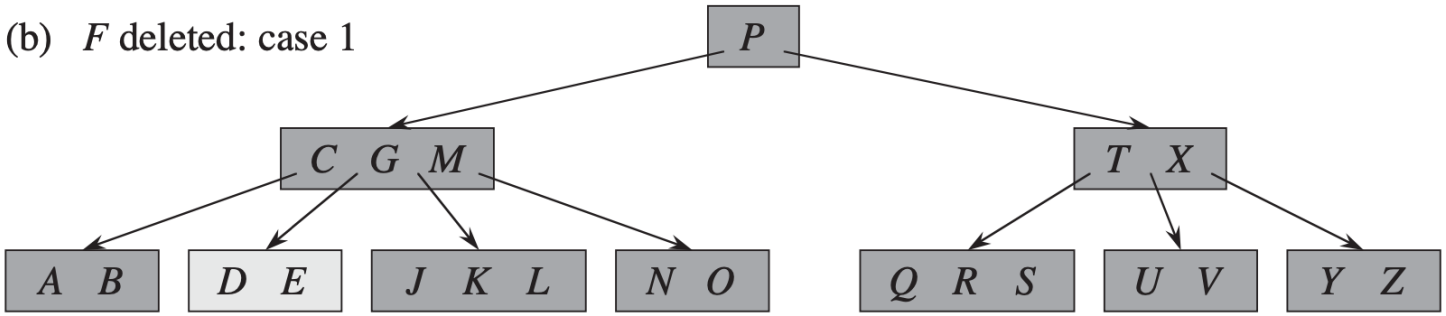
Delete pro B-stromy (ukázka)



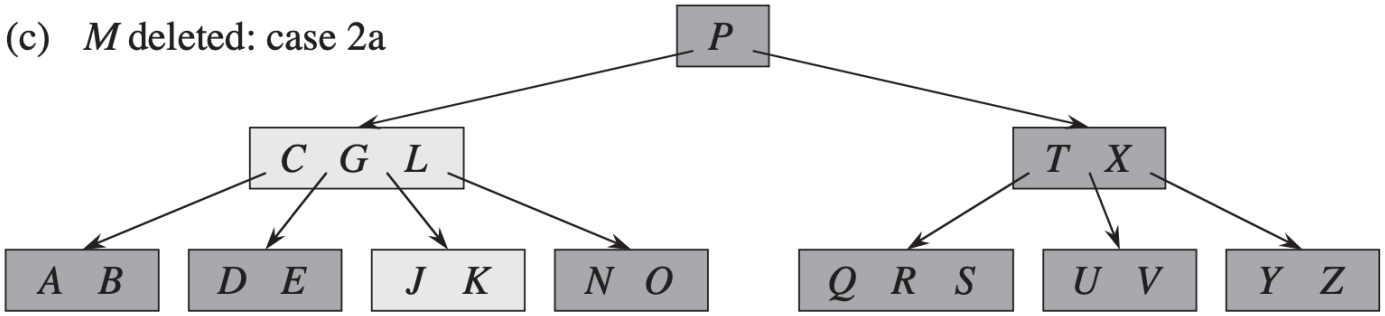
Minimální stupeň $t = 3$

Delete pro B-stromy (ukázka)

(b) *F* deleted: case 1

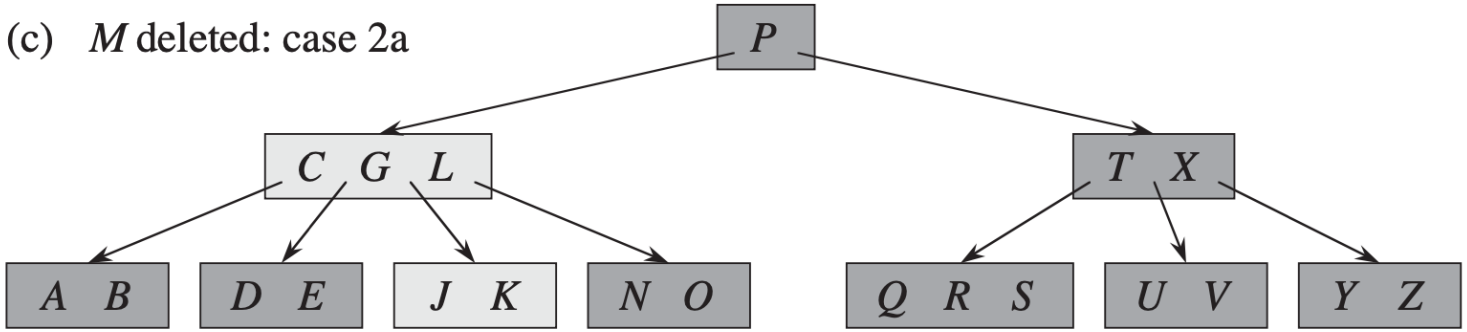


(c) *M* deleted: case 2a

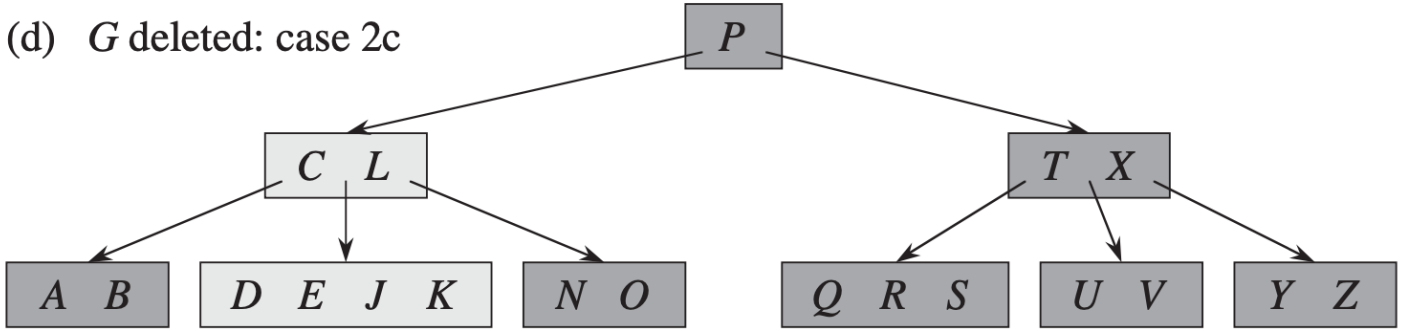


Delete pro B-stromy (ukázka)

(c) *M* deleted: case 2a

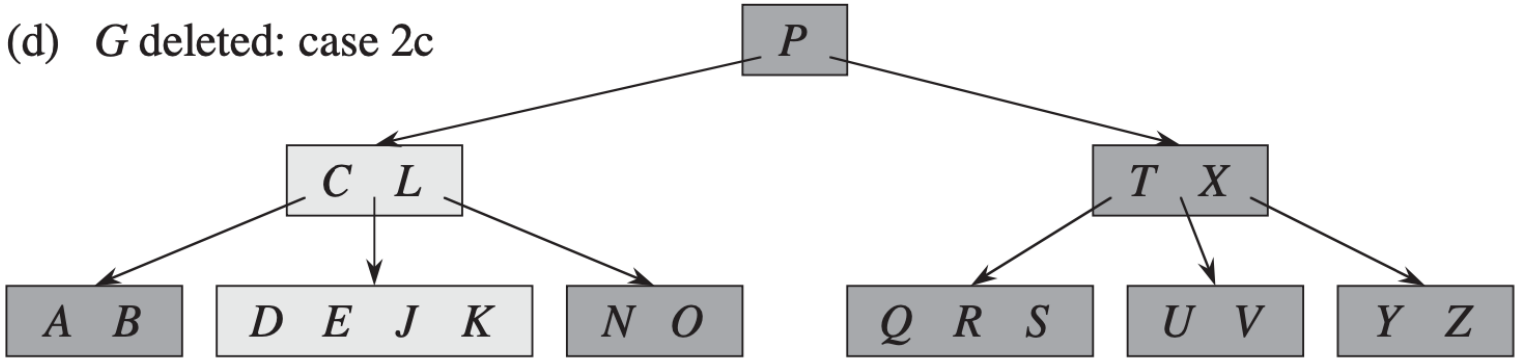


(d) *G* deleted: case 2c

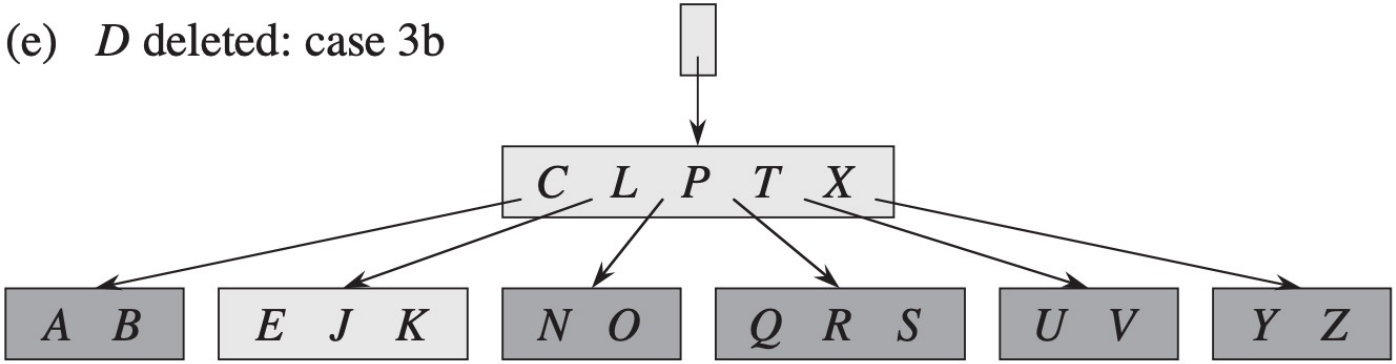


Delete pro B-stromy (ukázka)

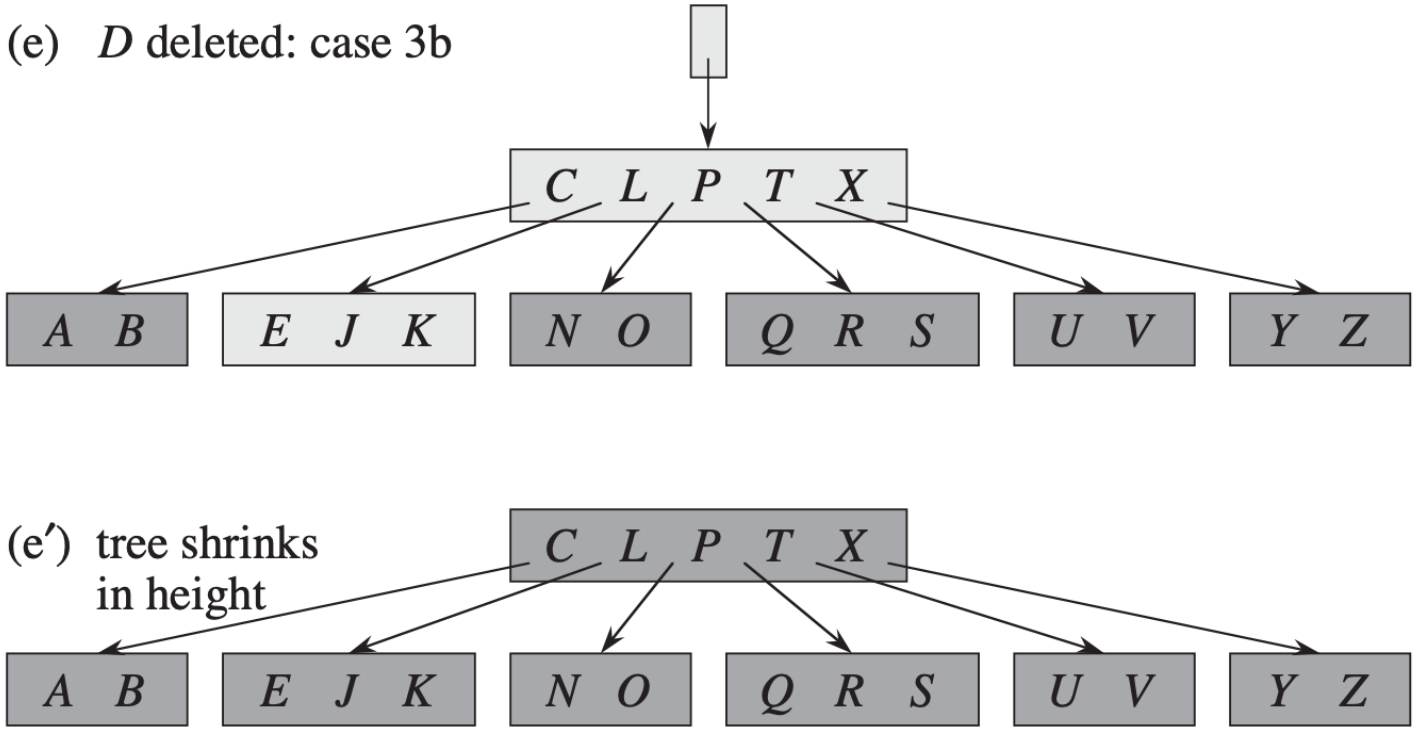
(d) *G* deleted: case 2c



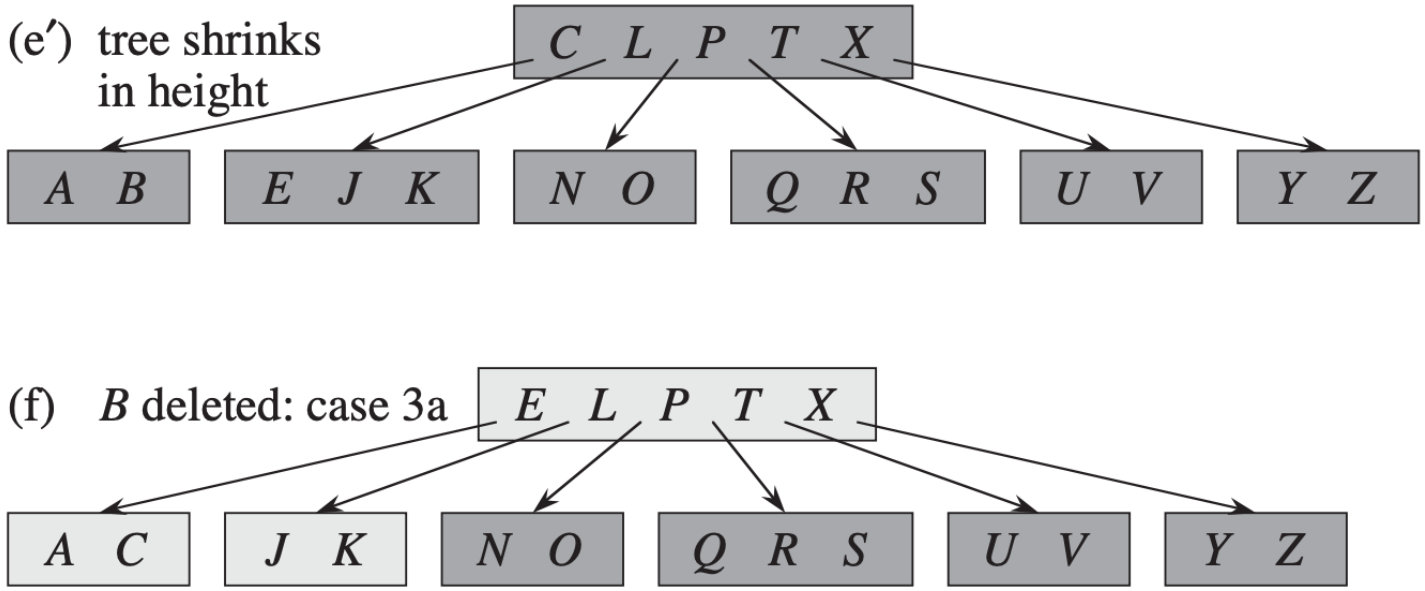
(e) *D* deleted: case 3b



Delete pro B-stromy (ukázka)



Delete pro B-stromy (ukázka)



Maximální výška B-stromu

- $h \leq \log_{\lceil m/2 \rceil}((N+1)/2)$

- Dává horní hranici přístupů na disk.
- Viz [Maire] nebo [Cormen] podrobnosti

References

- [Cormen] Cormen, Leiserson, Rivest: Introduction to Algorithms, Chapter 14 and 19, McGraw Hill, 1990
- [Whitney]: CS660 Combinatorial Algorithms, San Diego State University, 1996], RedBlack, B-trees http://www.eli.sdsu.edu/courses/fall96/cs660/notes/redBlack/redBlack.html#RTFToC5
- [Wiki] B-tree. (2006, November 24). In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 20:25, December 12, 2006, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=B-tree&oldid=89805120
- [Maire] Frederic Maire: An Introduction to Btrees, Queensland University of Technology,1998] http://sky.fit.qut.edu.au/~maire/baobab/lecture/
- [RB tree] John Franco - java applet
- http://www.ececs.uc.edu/~franco/C321/html/RedBlack/redblack.html
- [Jones] Jeremy Jones: B-Tree animation - java applet https://www.cs.tcd.ie/Jeremy.Jones/vivio/trees/B-tree.htm

The End