

Nalezení minimální plochy pomocí Jacobiho metody

Zadání

Mějme obecnou uzavřenou křivku v \mathbb{R}^3 popsanou parametrizací

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad (1.1)$$

kde $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ jsou souřadnice bodů ležících na křivce l , $t \in [0, T]$. Úkolem je nalézt plochu, jejíž konturou je křivka l a jejíž všechny lokální extrémů leží také na křivce l . Lze ukázat, že tato plocha je řešením Laplaceovy rovnice

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2)$$

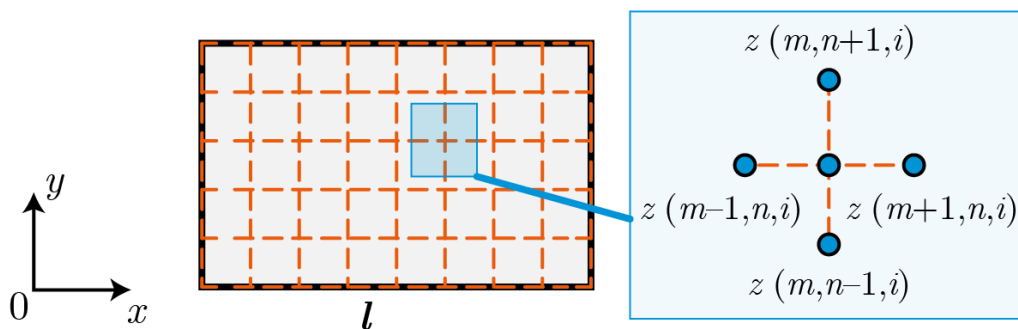
na ploše, která je uzavřená průmětem křivky l do roviny x - y . Rovnice (1.2) je dále doplněna okrajovou podmínkou

$$z = z(t). \quad (1.3)$$

Úloha obecně nemá analytické řešení a je nutno ji řešit numericky. Pro řešení úlohy využijte Jacobiho iterativní metodu (bez relaxace), [2], jejíž naivní algoritmus v Matlabu je přiložen na konci zadání. Algoritmus hledá iterativně řešení pomocí náhrady derivací konečnými diferencemi

$$z(m, n, i+1) = \frac{1}{4} (z(m+1, n, i) + z(m-1, n, i) + z(m, n+1, i) + z(m, n-1, i)) \quad (1.4)$$

s tím, že v každé iteraci i je zajištěna platnost podmínky (1.3), viz následující obrázek.



Upravte algoritmus tak, aby umožnil nalézt řešení problému (1.2) za podmínky (1.3). Vyřešení tohoto zadání zajišťuje nárok na zápočet. Pravděpodobně budete muset

- algoritmus vektorizovat (akcelerace výpočtu),
- aproximovat hodnotu okrajové podmínky s ohledem na ekvidistantní mříž (zvažte i využití neekvidistantní mřížky [3]),
- vypočítat hraniční body diskretizační mřížky, případně se jinak (NaN?) vyrovnat s body mimo danou plochu.

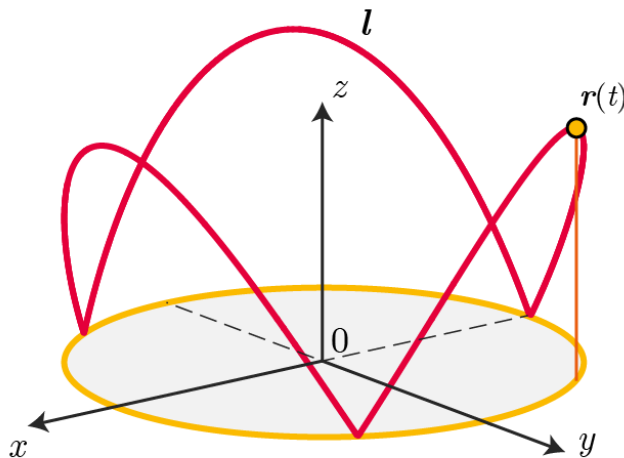
Algoritmus bude zastaven s ohledem na relativní chybu v dvou po sobě následujících krocích v zadaném místě. V rámci soutěže se potom soustředíte na potřebnou dobu výpočtu, kterou se snažte minimalizovat.

Testovací příklad

Výpočet bude ověřen, a celkový čas výpočtu změřen, pro zadání (viz obrázek):

$$\begin{aligned}x &= \cos(t), \\y &= \sin(t), \\z &= \left| \sin\left(\frac{3}{2}t\right) \right|,\end{aligned}\tag{1.5}$$

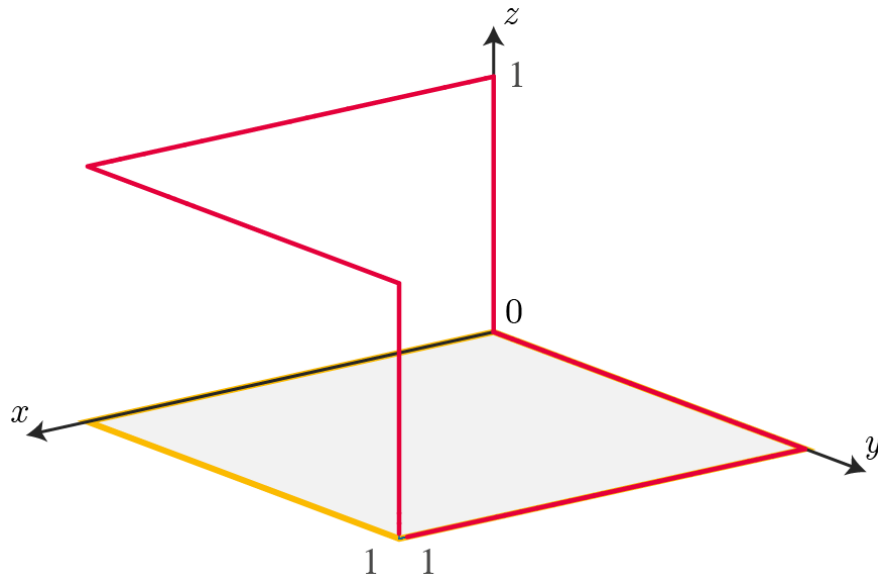
s parametrizací (1.1), $T = 2\pi$, kdy využijte nejméně 2500 bodů (matice bude mít kupř. 50×50 bodů, algoritmus však koncipujte tak, aby byl počet bodů proměnný). Relativní přesnost řešení v bodě $x=0, y=0$ musí být menší než $\epsilon_{\text{err}} < 1 \cdot 10^{-11}$ pro hodnoty získané ve dvou po sobě jdoucích krocích metody.



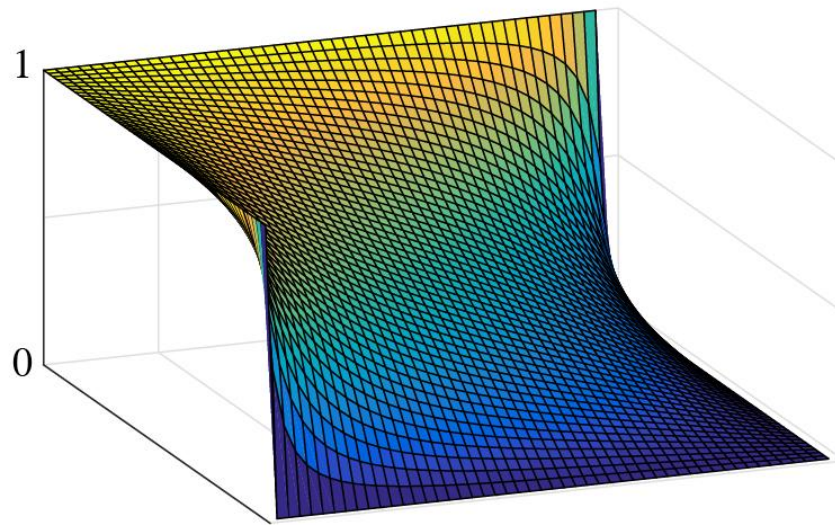
Poznámka: Obecnost metody může být ověřena i pro jinou křivku a jinou hodnotu okrajové podmínky.

Ukázka řešení:

Pro čtverec o straně 1 jsou definovány okrajové podmínky $z=1$ na hraně $x=x_{\text{max}}$ a $y=y_{\text{max}}$, viz obrázek níže.



Odhad řešení pro mřížku 50×50 a 10^4 iterací je zobrazen na následujícím obrázku.



Kód:

```

clear; close all; clc;

MM = 10000; % number of iterations (could be any number if a given error
           % tolerance is reached)
NN = 50;    % number of discretization samples
Xmat       = zeros(NN); % allocation

% boundary conditions
Xmat(:,1) = 0;
Xmat(:,end) = 1;
Xmat(1,:) = 0;
Xmat(end,:) = 1;

% preallocation of the second matrix (it is not necessary if a better
% solution is found... ;- )
Xmat_new = Xmat;

tic % time measurement
for mm = 1:MM % relaxation (iterations are needed)
    for iy = 2:(NN-1) % for y-axis
        for ix = 2:(NN-1) % for x-axis
            Xmat_new(iy, ix) = ...
                (Xmat(iy + 1, ix) + Xmat(iy - 1, ix) + ...
                 Xmat(iy, ix + 1) + Xmat(iy, ix - 1)) / 4;
        end
    end
    Xmat = Xmat_new; % assign new (improved) version of matrix for next it.
end
toc

surf(Xmat);

```

Zdroje:

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace's_equation

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Relaxation_%28iterative_method%29

Pozor, pouze pro neekvidistantní mřížku.

[3] <http://www.scientificpython.net/pyblog/non-uniform-finite-difference-approximations-to-the-second-derivative>

Podmínky udělení zápočtu:

- Projekt si může vybrat k řešení neomezený počet studentů v daném semestru.
- Očekává se však individuální přístup k řešení (bude kontrolována podobnost odevzdaných kódů).
- Projekt bude odevzdán spolu s dokumentací, nejdéle však v 14. týdnu (vzor dokumentace zde).
- Cílem je projekt zpracovat podle zadání, přičemž doba výpočtu uvozená příkazy `tic` a `toc` by měla být co nejkratší. Pro získání zápočtu je však podstatná správná funkčnost kódu, jeho přehlednost, zpracování nápovědy a dokumentace.

Účast v soutěži:

- Každé řešení bude krátce prezentováno, datum prezentace bude stanoven po dohodě během semestru. Je tedy vyžadována příprava několika málo slajdů, kde budou uvedeny postupy a zajímavé kroky a zjednodušení v implementaci.
- Prezentace soutěžních projektů bude provedena formou soutěže.
- Jsou zakázány části kódu kompilované do mex / dll atp., lze však libovolně využívat paralelizace a dalších technik akcelerace.
- Jediným povoleným programovacím jazykem je Matlab, nejsou dovoleny toolboxy.
- Všechny odevzdané kódy budou porovnány na stejném stroji, se stejnou instalací a operačním systémem (typicky Win7/10 + Matlab R2015b). Před vlastním měřením bude proveden warm-up. Skript bude spuštěn vícekrát a soutěžní čas bude průměr získaných hodnot (krom 1. spuštění).

Odstoupení od soutěže

- Student, který si vybral jako projekt toto soutěžní zadání, ale v průběhu semestru se rozhodne svoji práci neprezentovat, má právo ze soutěže odstoupit. Tuto skutečnost musí vyučujícím co nejdříve oznámit a bude individuálně posouzeno, jestli si student může vybrat nové zadání, anebo jestli dosud odvedenou práci upraví tak, aby splňovala náležitosti standardního projektu (především vytvoření GUI).

Kritéria pro vítězství v soutěži:

- Rychlost kódu.
- Plné naplnění zadání.

První tři nejrychlejší a správně zpracované projekty získají věcné ceny! A nehynoucí slávu... ;-)

Věcné výhry

Katedra elektromagnetického pole, ve spolupráci s firmou Humusoft odmění vítězce následujícími cenami. Výherce dostane hlavní cenu a možnost vybrat si i z ostatních cen. Druhý a třetí výherce si může vybrat z ostatních cen.

Hlavní cena:

- kurz od firmy Humusoft dle vlastního výběru (OOP, image processing, effective techniques, ...)

Ostatní ceny:

- sklenice 0,5 a 0,3 L s Maxwellovými rovnicemi
- tričko Humusoft s logem firmy (XL)
- USB disk 4GB
- svítidla Humusoft
- propiska Humusoft
- přívěšek s PC šroubováčky
- kšiltovka Humusoft